Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS 2007/08 (2. Serie)

14. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale! Skizzieren Sie den Integrationsbereich! Deuten Sie die Ergebnisse geometrisch!

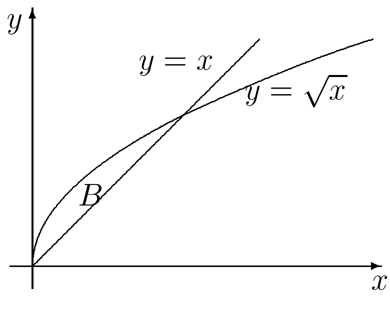
a) $\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=x}^{2x} (2x+4y+10)dy\,dx$ b) $\int\limits_{y=1}^{2} \int\limits_{x=1/y}^{2/y} dx\,dy$

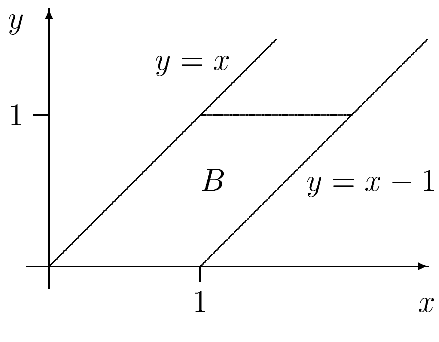
15. Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge!

a) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$ b) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=(1-x^2)/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\,dx$

16. Man berechne folgende Doppelintegrale über den angegebenen Gebieten B.

a) $I = \iint\limits_B x \cdot \frac{e^y}{y^2}\,dx\,dy$ b) $\iint\limits_B (y^2+2x+1)\,dx\,dy$





17. Berechnen Sie

a) $\int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=1}^{x} dydx$; b) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=y}^{1} (x^2+y^2+1)dxdy$

c) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+y^2}\,dydx$; d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} xye^{-x^2-y^2}dxdy$!

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich!

18. Berechnen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

$$a)\ \begin{array}{rcl} y &=& ex^2 \\ y &=& e^x \\ x &=& 0 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl} 4y &=& x^2-4x \\ x-y-3 &=& 0 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rcl} y &=& \ln x \\ y &=& x-1 \\ y &=& -1 \end{array}$$

19. Ermitteln Sie den geometrischen Schwerpunkt des Halbkreises
$\{(x,y) : y \geq 0\,; \quad x^2+y^2 \leq r^2\}$!

20. Bestimmen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

a) $y = x-2$ und $y^2 = x\,;$

b) $xy = 4$ und $y = 5-x$!

21. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der von folgenden Flächen begrenzt wird!

a) $z = 0\,; \quad z = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}\,; \quad y = \sqrt{1-x^2}$ und $y = 0;$

b) $z = 0$ und $z = e^{-x^2-y^2}$!

22. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der von den Kurven $y = x-3$ und $4y - x^2 + 4x = 0$ eingeschlossenen Fläche!

23. Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der durch die Flächen
$x = a\,; \quad 2x+z = 2a\,; \quad x+z = a\,; \quad y = \sqrt{ax}\,; \quad y = 0$ begrenzt wird, wenn die Dichte in jedem Punkt gleich der Ordinate y dieses Punktes ist!

24. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{4+3x^2+3y^2}$!

25. Bestimmen Sie das Doppelintegral über dem Kreisringsegment D :

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,dxdy\,, \quad D = \{1 \leq x^2+y^2 \leq 9\,,\ y \geq x/\sqrt{3}\,,\ y \leq \sqrt{3}\,x\}.$$

26. Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche S für

$$S = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}\,.$$

Skizzieren Sie S.