

**Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS
2007/08 (3. Serie)**

27. Sei $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$. Man berechne den Schwerpunkt von B ($\rho = \text{const}$). Skizzieren Sie B .

28. Man ermittle

$$I = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz,$$

falls

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x\}$$

und $f(x, y, z) = xyz$. Skizzieren Sie B .

29. Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$I = \int_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$$

der Oberfläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$ bezüglich der z -Achse, wenn $\rho(x, y, z) = 1$ gilt. Skizzieren Sie S und die Projektion von S in die (x, y) -Ebene.

30. Berechnen Sie das Kurvenintegral vom Punkt $A = (0, 1)$ zu Punkt $B = (1, 0)$

$$\int_A^B (x\sqrt{y} dx + y^2 dy)$$

längs der Wege

a) $y = 1 - x^2$

b) Gerade \overline{AB} !

c) Streckenzug $A \rightarrow B \rightarrow C$ mit $C = (1, 1)$ (jeweils achsenparallel)!

31. In dem Kraftfeld $\vec{F} = (2x - \frac{1}{2}y + 3)\vec{e}_1 + (\frac{1}{2}x + 3y)\vec{e}_2$ wird eine Masse von $P = (-2, 0)$ nach $Q = (0, 2)$ transportiert.

Man berechne die Arbeit bei folgenden Wegen

a) Strecke \overline{PQ} ;

b) Viertelkreis mit dem Mittelpunkt $M = (0, 0)$.

32. Im Kraftfeld $\vec{F} = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 1 \right]^T$ wird eine Masse längs des Weges $\vec{r}(t) = \left[\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t \right]^T$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ transportiert. Berechnen Sie die Arbeit.

33. Sind die Integranden folgender Kurvenintegrale totale Differentiale einer Funktion Φ ? Wenn ja, berechne man nach Bestimmung von Φ die Integrale.

a) $\int ((x^2 + y)dx + (x - y^2)dy)$ längs der Wege

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

(2) geradlinig von $(1, 1)$ nach $(a, a),$

(3) $\vec{r}(t) = [2 \cos 3t, 4 \sin 3t]^T$ mit $0 \leq t \leq 2\pi.$

b) $\int (xe^y dx - ye^x dy)$ längs der Wege

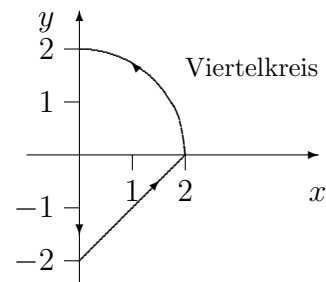
(1) geradlinig von $(0, 1)$ nach $(1, 0),$

(2) Viertelkreis von $(0, 1)$ nach $(1, 0).$

34. Ermitteln Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\oint ((x^2 + y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + 2)dy)$$

längs des skizzierten Weges!



35. Berechnen Sie unter Verwendung eines Doppelintegrals das Kurvenintegral $\oint \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right)$ längs des Umfangs des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten $A = (1, 1), B = (2, 1)$ und $C = (2, 2)$!

36. Bestimmen Sie die Fläche der Astroide $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ mit Hilfe eines Kurvenintegrals!

37. Gegeben ist $\vec{F}(x, y) = (12x^2 + cxy + 2ye^{2xy})\vec{e}_1 + (8x^2 + 2xe^{2xy} + 10y + 3)\vec{e}_2.$

a) Für welchen Wert c ist das Kurvenintegral $\int_A^E \vec{F} \cdot \vec{dr}$ vom Wege unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Kräftefunktionen $\Phi(x, y),$ wenn $d\Phi = \vec{F} \cdot \vec{dr}$!