Fakultät für Mathematik, Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure

Serie 1 (Funktionen, Inverse Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen)

1. Gesucht sind der größtmögliche Definitionsbereich und der zugehörige Wertebereich von

   a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $y = \ln(2 - 4\sin^2 x)$

   d) $y = \ln(3 - \sqrt{x+7})$ e) $\sqrt{\ln \dfrac{5x - x^2}{4}}$ f) $y = \sqrt{|x-1| - x}$

2. Es seien $f(x) = x\sqrt{x+1}$, $h(x) = x^3 - x$ und $g(x) = \sin 2x$.
   Bestimmen Sie:
   a) $f(x-1)$, $f(x) - 1$, $-f(x)$, $f(-x)$, $2f(x)$, $f(2x)$,
   b) $h[h(x)]$, $g[h(2)]$, $h[g(x)]$, $g[\pi h(2)]$!

3. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade?

   a) $f_1(x) = x \cdot \sin x$, b) $f_2(x) = x^2 \cdot \sin x$, c) $f_3(x) = x + \sin 2x$,

   d) $f_4(x) = x(e^x + e^{-x})$, e) $f_5(x) = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, f) $f_6(x) = \ln \dfrac{4+x}{4-x}$.

4. Sind folgende Funktionen $y = f(x)$ periodisch? Wenn ja, bestimmen Sie die kleinsten Periode ω:

   a) $y = \cos(2 - \pi x)$, b) $y = 3e^{\cos 4x}$,

   c) $y = \sin(x + \sin x)$, d) $y = \ln(2\sin^2 x + 1)$.

5. Skizzieren Sie die periodischen Funktionen:

   a) $y = x^2$ für $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ mit der Periode π ,
   b) $y = 1 - 2|x|$ für $-1 \le x \le 1$ mit der Periode 2 .

6. Geben Sie die Umkehrfunktionen an von:

   a) $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$, $x \neq -4$, b) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$, $x \ge 0$,

   c) $y = g(s) = \ln \sqrt{\dfrac{4s+3}{3s-2}}$, $s > \dfrac{2}{3}$,

7. Man zerlege in Linearfaktoren und skizziere folgende Funktionen:
   a) $y = x^3 + x^2 - 8x - 12$, b) $y = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$,
   c) $y = (x^6 - 25x^4)(x^2 - 4)(x - 5)^3$.

8. Ermitteln Sie Nullstellen, Pole, Lücken und Asymptoten der folgenden Funktionen und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven!

   a) $y = \dfrac{2}{x-1}$, b) $y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, c) $y = \dfrac{2}{x^2+1}$,

   d) $y = \dfrac{4(x-2)}{(x+1)^2}$, e) $y = \dfrac{2x^2+4}{4-x^2}$, f) $y = \dfrac{x^4-1}{x}$,

   g) $y = \dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$, h) $y = \dfrac{x^4-8x^2+16}{(x^2-3x-10)(x+1)}$.

9. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen für $|x| \leq 4\pi$ und bestimmen Sie die Periode:

   a) $f_1(x) = \sin 2x$, b) $f_2(x) = \sin(x/2)$, c) $f_3(x) = |\sin x|$,

   d) $f_4(x) = |\cos x|$, e) $f_5(x) = \cos(x - \pi/3)$, f) $f_6(x) = \tan(3x + \pi/2)$.

10. a) Bestimmen Sie die Inverse zu $y = f_1(x) = \sin x$ für $x \in [5\pi/2\, , \, 7\pi/2]$.

    b) Man vereinfache und skizziere

    α) $y = f_2(x) = \arcsin(\sin x)$, $x \in [-\pi; \pi]$,

    β) $y = f_3(x) = \cos(\arcsin x)$, $x \in [-1; 1]$.

11. Man zeige a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ und b) $\cosh^2 x = \dfrac{1}{1-\tanh^2 x}$.

12. Welche Ausdrücke sind definiert? Vereinfachen Sie diese!

    a) $\operatorname{arsinh}\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)$, b) $\operatorname{arsinh} 0$,

    c) $\operatorname{arcosh} 0$, d) $\operatorname{artanh} 0$, e) $\operatorname{artanh} \dfrac{e^2-1}{e^2+1}$.

13. Mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel ist das Polynom niedrigsten Grades anzugeben, welches folgende Punkte enthält.

    $P_0(-3; -40), P_1(0; -4), P_2(1; -8), P_3(3; -40), P_4(6; -148)$.

    Wie ändert sich das Ergebnis, wenn $P_5(-1; 104)$ hinzukommt?

14. Man berechne die Grenzwerte der folgenden Funktionen:

    a) $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$

    d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2+x-3x^3}{4+x^2+6x^3}$ f) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}\right)$

15. Ermitteln Sie Unstetigkeitsstellen und skizzieren Sie die Bilder der Funktionen:

a) $y = \dfrac{1}{1 + 4^{1/x}}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{für} \quad |x| < 2 \\ 2 & \text{für} \quad |x| = 2 \\ 3 & \text{für} \quad |x| > 2 \end{cases}$

c) $y = \arctan \dfrac{5}{5-x}$ d) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$

16. Wo sind folgende Funktionen differenzierbar?

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-2x}$ b) $f(x) = |\sin 3x|$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & \text{für } x \neq -1 \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 12 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

17. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven

$y = x^2/2$ und $y = (8 - x^2)/2$?

18. Zeigen Sie, dass die Parabel $y = \dfrac{x^2}{2e}$ die Kurve $y = \ln x$ berührt und bestimmen Sie den Berührungspunkt. Zeichnen Sie die Kurven!

19. Es ist zu zeigen, dass die Funktion $x(t) = \dfrac{t - e^{-t^2}}{2t^2}$ der Differentialgleichung $t\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^{-t^2} + \dfrac{1}{2t}$ genügt.

20. Bilden Sie die 1. Ableitung !

a) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^3} + 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{8}{3\sqrt{x}}$ b) $y = (3 - 2\ln x)^4$

c) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ d) $y = \sqrt{3 - 2\sqrt{x}}$

e) $y = \ln(x^2 + \sin 2x)$ f) $y = \arctan 2x + \arctan \dfrac{1}{x}$

g) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$ h) $y = e^{\sqrt{x}} \sin 3x$

i) $y = 6\sin^2 x + 2\cos^2 3x$ j) $y = \ln \tan \dfrac{x}{2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

k) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ l) $y = \ln 2 + \ln \sqrt{\dfrac{e^{5x}}{e^{5x}+3}}$