Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure, Serie 2

21. Vom Punkt $P_0(1;1)$ ist an die Bildkurve der Funktion $y = 1 + \ln(x-1)$ die Tangente zu legen. Ermitteln Sie die Tangentengleichung!

22. Man bilde die erste Ableitung der Funktionen:

    a) $y = 2x^{3x}$ b) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

    c) $y = (\sin x)x^{\cos x}$ d) $y = 2x^{\sqrt{x}} + 4^{1-x}$

    e) $y = \dfrac{\sqrt{x+3} \cdot 3^x \cdot \cos^3 x}{(2+3x)^2}$

23. Bestimmen Sie im Punkt $x_0 = 0$ die Gleichung der Tangente an die Kurve, gegeben durch $f(x) = (1 + \sin 2x)^{2x+1}$.

24. Bilden Sie die Differentiale: (Beachte $df(x) = f'(x)\,dx$

    a) $d(\sinh^2 x)$ b) $d\,(\ln\ \cos 2\varphi)$ c) $d(\arctan\sqrt{4t+1})$

25. Für die Ausflußgeschwindigkeit v einer Flüssigkeit aus einem Gefäß gilt angenähert die Formel $v = \sqrt{2gh}$, worin $g = 981$ cm/ s^2 die Erdbeschleunigung und h die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Öffnung sind. Man bestimme den prozentualen Fehler von v , wenn $h = 7,34$ cm gemessen wurde. Der prozentuale Fehler von h sei 4% .

26. Berechnen Sie Extremwerte und Wendepunkte der Funktionen

    a) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ b) $y = xe^{-2x^2}$ c) $y = x^2\,\ln 2x$

    Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen !

27. Von der Funktion $f(x) = (x-1)^2 e^{2x}$ sind gesucht: Nullstellen; Extremwerte, Wendepunkte, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und die zugehörige Kurve.

28. Zeichnen Sie das Bogenstück $\overset{\frown}{AB}$ der Kurve $y = |\cos x|$ im abgeschlossenen Intervall $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Warum gibt es keine Tangente an das Bogenstück, die parallel zur Sehne $\overline{AB}$ verläuft?

29. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes sind die Stellen zu berechnen, wo die Tangente an die Kurve den gleichen Anstieg hat wie die Sekante durch die Kurvenpunkte mit den Abzissen a und b.

a) $f(x) = e^{3x} \quad , \quad a = 0 \quad , \quad b = \frac{1}{3} \ln 2$

b) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x} \quad , \quad a = 0 \quad , \quad b = \frac{1}{2}$

30. Gegeben ist die Gleichung einer Parabel durch $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und eine Sekante durch die Parabelpunkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$. Gesucht ist die Tangente, die parallel zu dieser Sekante verläuft. Bestimmen Sie das ϑ in der Formel des Mittelwertsatzes!

31. Bestimmen Sie bis zum Glied x^3 die Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ und geben Sie $R_3(x)$ an für

    a) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ b) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$.

32. Wie klein muss $x > 0$ sein, wenn man bei der Berechnung von $(1+x)^{1/2}$ die Näherungsformel $1 + \frac{1}{2}x$ benutzt und nach der Rechnung 6 Dezimalen beizubehalten wünscht?

33. Man berechne folgende Grenzwerte:

    a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^3}{2(x^2-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

    c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{\ln(x-1)}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$

    e) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x) \tan \frac{\pi}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$

    g) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{\ln x}$

34. Bestimmen Sie $\dfrac{dy}{dx}$ und $\dfrac{d^2y}{dx}$!

    a) $x = 2\cos t$ b) $x = 2\ln t$

    $y = \sin t$ $y = 1 + t^2$

35. Bestimmen Sie y' in (x_0, y_0)!

    a) $xy^2 = 18$ in $(2; -3)$

    b) $\sin(x+y) = 2x$ in $(0; \pi)$.

36. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$x(t) = \tan t; \quad y(t) = \cos^2 t \quad \text{für} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}\,!$$

37. Mit dem Newton-Verfahren berechne man die kleinste positive Lösung der folgenden Gleichung:

$$x^3 + e^{-x} = 2\,.$$