Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik II für Ingenieure, SoSe07
(3. Serie, Funktionen mehrerer Variabler, Gradient, Rotation, Divergenz)

38. Man bestimme und skizziere den größtmöglichen Definitionsbereich folgender Funktionen:

a) $z = \sqrt{4x+y} + \sqrt{4x-y}\,,$ b) $z = \ln(x^2+y-1)\,,$

c) $z = \dfrac{2}{\sqrt{\ln(5-x^2-y^2)}}\,,$ d) $z = \arcsin(5-2y+2x)\,,$

e) $z = \ln[2x\,\ln(y-x)]\,.$

39. Skizzieren Sie die durch Hauptschnitte entstehenden Kurven für die Flächen:

a) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}\,,$ b) $z = 1+\sqrt{x^2+y^2}\,,$

c) $z = \sqrt{36-9x^2-4y^2}\,,$ d) $z = xe^y\,.$

40. Skizzieren Sie von den folgenden Funktionen einige Höhenlinien

a) $z = 2x+y\,,$ b) $z = y(1+x^2)$ bzw. c) $z = (4-x^2)e^y\,.$

41. Welche Flächen 2. Ordnung sind durch folgende Gleichungen gegeben?

a) $9x^2+4y^2 = 36\,,$ b) $z^2-4x^2+y^2 = 1\,,$

c) $36x^2+16y^2+9z^2 = 144\,,$ d) $y^2 = x^2+z^2\,,$

e) $16z = 4x^2+y^2\,,$ f) $x^2 = 4y\,.$

42. Wie lautet die Gleichung der Fläche, die entsteht, wenn die Kurve mit der Gleichung $z = \ln x$ um die z-Achse rotiert?

43. Berechnen Sie: a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2ye^{4x}-xe^{2y}}{3x+2y}\right),$

b) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ye^{4x}-xe^{2y}}{3x+2y}\right)$ und c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{\sqrt{xy+16}-4}{2xy}$!

44. Für die folgenden Funktionen sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung allgemein und an der Stelle (x_0,y_0) zu ermitteln. Man bestimme jeweils den Gradienten $\nabla z(x_0,y_0)$ in (x_0,y_0).

a) $z = x^2+2y^2\ ;\ (x_0,y_0) = (2,1)\,,$ b) $z = \ln\dfrac{2x+4y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\ ;\ (1,1)\,,$

c) $z = 2y+xe^{2xy}\ ;\ (1,0)\,,$ d) $z = \arctan\dfrac{y}{2x}\ ;\ (1,2)\,,$

e) $z = 3x^y+y^x+4\ ;\ (1,1)\,.$

Einige Bemerkungen zur Vektoranalysis:

Es seien $f(x,y,z)$ eine skalare Funktion und $\mathbf{F}(x,y,z) = (\,F_1(x,y,z)\,,\ F_2(x,y,z)\,,\ F_3(x,y,z)\,)$ ein (dreidimensionales) Vektorfeld jeweils der drei Variablen x, y, z.

a) grad $f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\,, \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,, \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right)$
definiert ein Vektorfeld, das Gradientenfeld (∇ ist der *Nabla*-Operator).

b) Der *Laplace*-Operator $\triangle$ einer skalaren Funktion $f(x,y,z)$ ist wieder ein Skalar (Summe der 2. partiellen Ableitungen):
$\triangle f(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\,.$

c) Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1\,,\ F_2\,,\ F_3)$ ist eine skalare Funktion und definiert die *Quelldichte* des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ (Summe der 1. partiellen Ableitungen der Komponenten von $\mathbf{F}$):
$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}\,.$

d) Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (\,F_1(x,y,z)\,,\ F_2(x,y,z)\,,\ F_3(x,y,z)\,)$ ist ein Vektorfeld, rot$\mathbf{F}$ erklärt die *Wirbeldichte* im Vektorfeld $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Beachte: rot$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ mit formal $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,, \dfrac{\partial}{\partial y}\,, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$. Die Rotation rot $\mathbf{F}$ eines Vektorfeldes ist nur in $I\!R^3$ erklärt. Der Gradient grad $f = \nabla f$ und der Laplace-Operator $\triangle f$ für eine skalare Funktion f sowie die Divergenz div $\mathbf{F}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ sind für beliebig viele Variable definiert.

45. Es sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (ze^{2x}, xe^{-y}, zy^2)^T$ ein Vektorfeld. Man bestimme rot $\mathbf{F}$, div $\mathbf{F}$ und grad (div $\mathbf{F}$).

46. Gegeben sind die Skalarfunktion $U(x,y,z) = x^2y + yz + 2xz^2$ und das Vektorfeld $\mathbf{F}(x,y,z) = (xe^{-y}, zy^2, ze^{2x})$. Ermitteln Sie:

a) grad U ,	b) div $\mathbf{F}$,	c) rot $\mathbf{F}$,
d) div (grad U) ,	e) div (rot $\mathbf{F}$) ,	f) rot (grad U) .

47. Ist das Vektorfeld $\mathbf{v} = (\,v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\,) = (x^2 - y^2\,,\ z^2 - xy\,,\ -xz)$ quellenfrei?

48. Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v} = (\,v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\,) = (x^2\,,\ -y\,z^2\,/\,x\,,\ x\,z)$ und das Skalarfeld $U(x,y,z) = 4x^2 + 6y^2 + z^2$. Berechnen Sie für den Punkt $A = (1\,,\,-2\,,\,4)$ die Komponente des Vektorfeldes rot $\mathbf{v}$ in Richtung des größten Anstieges der Ortsfunktion $U(x,y,z)$!