Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS 2007/2008 (1. Serie, Integralrechnung mit einer Variablen)

1. Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion von $y = f(x)$!

   a) $f(x) = 3x^5 + \sqrt{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{3x+2}$

   c) $f(x) = \frac{(2+\sqrt{x})^2}{8x}$ d) $f(x) = \frac{1}{(5x+2)^3}$

   e) $f(x) = \cos 3x + \sin 3x$ f) $f(x) = \sinh(2x+3)$

   g) $f(x) = \frac{2}{2x+4}$ h) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+1}$

   i) $f(x) = \frac{\sin 3x}{2+\cos 3x}$ j) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+4e^{2x}}$

   k) $f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$ l) $f(x) = 6\,x\,e^{3x^2}$

   m) $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$ n) $f(x) = x^3\sqrt{1+x^4}$

2. Es sind die Werte folgender Integrale zu berechnen, wobei die angegebenen Substitutionen anzuwenden sind!

   a) $\int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx$ mit $2+4x = z^2$

   b) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$ mit $x-1 = t^2$ und c) $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$ mit $z = \frac{1}{t}$

3. Durch geeignete Substitutionen sind folgende Integrale zu bestimmen:

   a) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$ *b)* $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx$ *c)* $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

   d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ *e)* $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ *f)* $\int \frac{dx}{\cos x}$

4. Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

   a) $f(x) = xe^{2x}$ b) $f(x) = x^2\cos x$ c) $f(x) = e^{3x}\cos x$

5. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{3x^2 - x}{(x^2+1)(x-2)}$.
   Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und berechnen Sie $\int f(x)\,dx$.

6. Integrieren Sie folgende gebrochen rationale Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-3}{x^3-x}$

c) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^4-x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-5}{(x-1)(x^2-2x+2)}$

7. Bestimmen Sie:

$a) \int \dfrac{e^x}{9+e^{2x}}\,dx$ $b) \int \dfrac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

$c) \int \dfrac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx$ $d) \int \dfrac{(4e^x+5)e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$

8. Berechnen Sie:

$a) \int\limits_0^\infty xe^{-2x}dx$ $b) \int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$ $c) \int\limits_0^\infty \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

$d) \int\limits_0^2 \dfrac{dx}{(x-2)^3}$ $e) \int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2+x}$ $f) \int\limits_1^e \dfrac{dx}{x\ln x}$

9. Bestimmen Sie den Inhalt der Flächen, die durch folgende Kurven begrenzt werden! Skizzieren Sie die Flächen!

$$a) \quad \begin{cases} y &= \dfrac{5}{1+2x^2} \\ |x| &= 3 \quad ; \quad y = 0 \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} y^2 &= 2x+4 \\ x &= 0 \end{cases}$$

10. Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden! Skizzieren Sie die Flächen!
a) $y = \dfrac{4}{1+x^2}$; $y = 0$; $x = 0$ sowie b) $y = e^{2x} - 1$; $y = 0$ und $x = -1$!

11. Bestimmen Sie die Bogenlänge! Skizzieren Sie die Kurven!

a) $y = 2\,\ln(1 - \frac{x^2}{4})$; $0 \leq x \leq 1$

b) $x = 4\,\ln t$; $y = 2t + \frac{2}{t}$; $2 \leq t \leq 4$

12. Das von der Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{5}\sqrt[4]{x}\,(36-x^2)$ und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück rotiere um diese Achse.

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskrpers.

13. Berechnen Sie für den Bogen der Zykloide, gegeben durch

$$x = t - \sin t \quad ; \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

a) das Volumen des Körpers, der durch Rotation eines Zykloidenbogens um die x-Achse erzeugt wird.
b) die Bogenlänge eines Bogens.
c) den Inhalt der Oberfläche des Rotationskörpers, die bei Rotation eines Bogens um die x-Achse entsteht.