Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2009

Serie 4 (Verschiedene Verteilungen, Normalverteilung, Quantile, Korrelation, Zentraler Grenzwertsatz)
Zum Üben und zur Selbstkontrolle finden Sie die Stochastik-Anteile der Klausuren von 2005 (mit Lösungen) auf meiner Homepage
http://www.math.uni-magdeburg.de/home/~christop/

58. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 3.38 zur Starthilfem)
    Eine Münze wird viermal geworfen. X sei die zufällige Anzahl des Ergebnisses „Zahl liegt oben“.
    Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle von X!

59. Ein Kunde vereinbart mit seinen Lieferanten, dass er eine Lieferung von 200 Stück zurückgehen lässt, falls bei einer zufälligen Stichprobe von 20 Stück mehr als ein Stück defekt ist.
    Unter der Annahme, dass genau 10 der 200 Stücke defekt sind, bestimme man die Wahrscheinlichkeit für eine Rücksendung auf Grund der Stichprobe! Man setze eine Stichprobenentnahme
    a) mit Zurücklegen, b) ohne Zurücklegen voraus.

60. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 3.44 zur Starthilfe)
    Die Nutzungsdauer X (in Zeiteinheiten) einer Sorte von Verschleißteilen sei exponentialverteilt.
    Die mittlere Nutzungsdauer wird mit 100 Zeiteinheiten angegeben.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Verschleißteil länger als 10 Zeiteinheiten genutzt werden kann,
    b) von 5 solchen Teilen genau vier 10 Zeiteinheiten überleben?
    c) Berechnen Sie die bedingte Wkt. $P(X < 100 \,|\, X \geq 10)$!

61. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $E(X) = 0$ und $D^2(X) = 1$.
    Berechnen Sie a) $P(X \geq 2.5)$, b) $P(X < -1.5)$,
    c) $P(1.2 \leq X < 2.3)$, d) $P(-1.1 \leq X < 3)$!

62. (Bitte sich erst Aufgabe 61 ansehen.)
    Sei X eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$. Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c derart, dass folgende Beziehungen gelten:
    a) $P(X < a) = 0.9032$ b) $P(X \geq b) = 0.7580$
    c) $P(|X - \mu| < c) = 0.95$.

63. Auf zwei Drehautomaten werden die gleiche Art Werkstücke hergestellt. Der Durchmesser der Werkstücke soll 140 mm betragen. Die zulässige Toleranz ist $\pm 3\,\mathrm{mm}$. Für $i = 1, 2$ geben die Zufallsgrößen X_i den zufälligen Durchmesser der an dem i-ten Automaten hergestellten Werkstück an.
Automat I: X_1 sei normalverteilt mit $\mu_1 = 139\,\mathrm{mm}$ und $\sigma_1 = 1\,\mathrm{mm}$.
Automat II: X_2 sei normalverteilt mit $\mu_2 = 140\,\mathrm{mm}$ und $\sigma_2 = 2\,\mathrm{mm}$.
Bei welchem Automaten ist die Wahrscheinlichkeit des Produzierens von Ausschuss größer (Überschreiten der Toleranzgrenzen)?

64. Ein Automat fertigt Teile, deren Länge X eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 40\,\mathrm{mm}$ und $\sigma = 0.5\,\mathrm{mm}$ ist.
Der Toleranzbereich sei $[38.8\,\mathrm{mm}\,; 41.0\,\mathrm{mm}]$.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gefertigtes Stück normgerecht ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 3 ausgewählten Teilen höchstens 2 normgerecht sind?
c) Wie viel Prozent der gefertigten Teile sind mindestens 38.6 mm lang?
d) Für welchen Wert b gilt $P(39.2\,\mathrm{mm} \le X < b) = 0.9370$?
e) Für welchen Wert c gilt $P(|X - \mu| < c) = 0.95$?
f) Wie groß ist der normgerechte Anteil, wenn sich der Wert μ im Laufe der Zeit nach 40.2 mm verschiebt?

65. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 3.49 zur Starthilfe)
Die Länge X (in mm) von Stahlstiften sei angenähert normalverteilt mit $\mu = 15$. Ermitteln Sie die Standardabweichung, wenn 98% der Stahlstifte zwischen 14 mm und 16 mm lang sind!

66. Eine Zufallsgröße X besitzt die Dichtefunktion
$$f(x) = (1/2)\, e^{-|x|}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$
Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und die Quantile der Ordnung 0.4, 0.5 bzw. 0.7!
Die Zahl Q_p mit der Eigenschaft $F_X(Q_p) = p$ heißt *Quantil der Ordnung* p .

67. Ergänzen Sie für den Zufallsvektor (X, Y) die folgende Verteilungstabelle!

$X \backslash Y$	2	4	5	$P(X = x_i)$
-1	0.1	?	0.3	0.6
1	?	?	?	?
$P(Y = y_k)$	0.1	0.4	?	?

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für X und Y!
b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (Begründung!)
c) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten!

68. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 3.52 zur Starthilfe)
Ein Arbeiter stellt mit der Wahrscheinlichkeit 0.9 ein Erzeugnis her, für das ein Jahr Garantie übernommen werden kann. Mit der Wahrscheinlichkeit 0.09 wird ein beschädigtes Erzeugnis hergestellt, das sich jedoch ausbessern lässt und damit mit der Wahrscheinlichkeit 0.01 ein total unbrauchbares Stück. Es seien X die Anzahl der Erzeugnisse, für die ein Jahr Garantie übernommen wird und Y die Anzahl der beschädigten Stücke in einer Probe vom Umfang 3.
a) Bestimmen Sie die Verteilungstabelle der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y)!
b) Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten der Randverteilung von X bzw. Y!
c) Wie lautet die Verteilungstabelle der bedingten Einzelwahrscheinlichkeiten von X unter der Bedingung $\{Y = 1\}$?

69. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy + y & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1\,;\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Eigenschaften einer Dichtefunktion eines Zufallsvektors (X, Y) besitzt!
a) Ermitteln Sie die Randdichten! b) Sind X und Y unabhängig?
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P((X,Y) \in B)$ mit
$B = \{\ (x,y)\ \mid\ x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0\ \}$!

70. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 3.59 zur Starthilfe)
Die Zufallsgrößen X_i, $i = 1, 2, 3$, seien unabhängig und identisch verteilt. Bekannt sind ihre Kennwerte $E(X_i) = 4$ und $Var(X_i) = 1$.
Es seien $Y_1 = (X_1 + X_2)/2$ und $Y_2 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgrößen Y_1 und Y_2 sowie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten zwischen Y_1 und Y_2 !

71. Ein homogener Würfel wurde 500 mal geworfen. Die Augenzahl 4 trat dabei 60-mal auf. In diesem Versuch beträgt die Abweichung der relativen Häufigkeit $60/500 = 0.12$ von der Wahrscheinlichkeit $1/6 = 0.1666$ also 0.0466. Berechnen Sie eine obere Schranke der Wahrscheinlichkeit, dass bei 500 Würfen mit einem homogenen Würfel die relative Häufigkeit einer Augenzahl um 0.0466 oder mehr vom Erwartungswert 1/6 abweicht.

72. Ein Meinungsforschungsinstitut führt eine ,,representative Umfrage" durch, um den Stimmenanteil $p \in (0; 1)$ für eine Partei A bei den bevorstehenden Wahlen zu prognostizieren. Betrachten Sie das Ereignis, dass für die Anzahl X der ,,A-Wähler" in der Stichprobe (vom Umfang n) gilt: $|\frac{X}{n} - p| < 0,002$. Der Stichprobenumfang n soll so groß gewählt werden, dass dieses Ereignis eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % hat. Bestimmen Sie ein solches

n mit Hilfe der Ungleichung von Chebyshev.
Hinweis: Betrachten Sie als Modell für das Zufallsexperiment ,,Umfrage" den W-Raum mit der $Bi(n,p)$-Verteilung. Verwenden Sie dabei die für alle $p \in (0,1)$ gültige Ungleichung $p(1-p) \leq 1/4$.

73. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 4.60 zur Starthilfe)
Ein idealer Würfel wird 100-mal geworfen. X sei die Augensumme.
a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X!
b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X Werte im Intervall $[330, 380]$ annimmt!

74. (Selbststudium, Hörsaalübung, Aufgabe 4.61 zur Starthilfe)
Wie oft muss man eine Münze werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9973 behauptet werden kann, dass der Unterschied von relativer Häufigkeit des Ereignisses „Zahl liegt oben“ und der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses dem Betrage nach kleiner als 0.01 ist?

75. Ein Flugzeug hat 200 Plätze, die Fluggesellschaft akzeptiert aber bis zu 220 Buchungen, da erfahrungsgemäß ein einzelner Flugpassagier (unabhängig von den anderen Passagieren) mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ den Flug nicht antritt.
a) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 220 Buchungen mehr als 200 Fluggäste den Flug antreten wollen.
b) Wie groß darf die Anzahl der akzeptierten Buchungen höchstens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste einen Platz in der Maschine bekommen, mindestens 0.95 beträgt?

76. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Treffer in $n = 900$ unabhängigen Versuchen und $H_{900} = \frac{X}{900}$ die Trefferhäufigkeit an, die Trefferwahrscheinlichkeit sei $p = \frac{1}{6}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Bedingung $|H_{900} - \frac{1}{6}| > \frac{1}{36}$ erfüllt? Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung.

77. Ein Vertriebsunternehmen besitzt in einer Großstadt 200 Zigarettenautomaten. Jeder Automat hat (unabhängig von den anderen) innerhalb einer Kalenderwoche mit Wahrscheinlichkeit 5% eine Störung. Für die Entscheidung über die Größe eines Serviceteams ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, dass in einer Kalenderwoche die Anzahl X der defekten Automaten zwischen 5 und 15 liegt.
a) Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mittels der Chebyshev-Ungleichung nach unten ab.
b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur).