Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2011

Serie 5 (Wiederholungsaufgaben, Normalverteilung, Zentraler Grenzwertsatz, Klausurbeispiele)
Die Serie ist als Füllstoff gedacht, bis wir Aufgaben zur Statistik üben können.
Zum Üben und zur Selbstkontrolle finden Sie auch Aufgaben aus meiner Starthilfe (mit Lösungen) auf meiner Homepage
http://www.math.uni-magdeburg.de/home/christoph/

79. Auf einer Maschine werden Bolzen gefertigt. Die Maßzahl der (in cm gemessenen) Länge der Bolzen kann als Zufallsgröße X angesehen werden, die normalverteilt mit dem Erwartungswert $E(X) = \mu = 10$ ist. Ein Bolzen wird als qualitätsgerecht angesehen, wenn seine Länge mindestens 9,8 cm und höchstens 10,2 cm beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bolzen qualitätsgerecht ist, beträgt 0,9546. Ein Bolzen gehört der Güteklasse 1 an, wenn er eine Länge zwischen 9,87 cm und 10,16 cm besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein qualitätsgerechter Bolzen der Güteklasse 1 angehört?

80. 40% einer Schülergruppe lernen Englisch, 30% lernen Mathematik und 20% lernen Mathematik, aber kein Englisch.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler
a) beide Fächer,
b) mindestens eines,
c) höchstens eines,
d) genau eines der Fächer lernt?

81. Eine Maschine produziert elektrische Widerstände. Die Maßzahlen der produzierten Widerstände sind normalverteilt mit $\mu = 150$, $\sigma = 2$ (Angaben in Ohm).

    a) Wie hoch ist der Ausschussanteil, wenn Widerstände von 150 Ohm mit den Toleranzen ± 4 Ohm benötigt werden?

    b) Wie hoch ist der Ausschussanteil, wenn sich die Einstellung der Maschine auf den Mittelwert $\mu = 152$ Ohm verändert?

    Bemerkung: In der ursprünglichen Aufgabe stand, dass die Chebyshev Ungleichung anzuwenden sei. Da die Verteilungsfunktion gegeben, ist ein direktes Berechnen möglich und einer Abschätzung immer vorzuziehen. Zum Vergleich löse man die Aufgabe mit der Chebyshevschen Ungleichung (indem man sich vorstellt, die Normalverteiltheit der Maßzahlen überlesen zu haben).

82. Für eine Veranstaltung werden Freikarten für die Ehrenplätze verteilt. Erfahrungsgemäß nutzen 20 % der geladenen Gäste unabhängig voneinander die Freikarte nicht aus.

   a) Es stehen 304 Ehrenplätze zur Verfügung. Wie viele Freikarten dürfen höchstens ausgegeben werden, damit der Veranstalter mit höchstens $2,275\,\%$ in Verlegenheit gerät?

   b) Es werden 400 Freikarten ausgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 320 Ehrenplätze bei der Veranstaltung belegt sind?

   c) Es werden 196 Freikarten verteilt. Wie viele Ehrenplätze genügt es bereitzustellen, wenn der Veranstalter mit mindestens $97,725\%$ sichergehen will, dass alle, die die Einladung annehmen, auch einen Ehrenplatz vorfinden?

   d) Es werden 225 Freikarten ausgegeben und 180 Ehrenplätze eingerichtet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es Freikarteninhaber geben, die vergeblich einen Ehrenplatz suchen?

83. Bei einem Massenartikel sind 10% fehlerhaft. 5 Stück werden überprüft.

    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass davon höchstens ein Stück fehlerhaft ist?

    b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung vom Umfang 400 die Anzahl der fehlerhaften Stücke zwischen 28 und 52 liegt!

Klausuraufgaben 2005 (84-88) und 2009 (89-92)

84.) (4 Punkte) Ein Händler bezieht Wellen von drei Betrieben, und zwar 40% aus Betrieb 1 und 50% aus Betrieb 2. Die Ausschussquoten sind 5% im Betrieb 1, 2% im Betrieb 2 und 10% im Betrieb 3.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Welle defekt?
b) Eine zufällig ausgewählte Welle erweist sich als defekt. Um diese defekte Welle zu reklamieren, bestimme man die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass die defekte Welle aus Betrieb 1, 2 oder 3 stammt!

85.) (6 Punkte) Die Zufallsgröße X nehme die Werte 1, 2 und 3 und die Zufallsgröße Y die Werte 1 und 2 an.
Dabei seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(X=1) = 0.5\,, \quad P(X=2) = 0.3\,, \quad P(Y=1) = 0.7\,,$$

$$P(X=1\,,\,Y=1) = 0.35\,, \quad P(X=3\,,\,Y=1) = 0.2\ .$$

a) Man stelle die Verteilungstabelle für den zufälligen Vektor $(X\,,\,Y)$ auf!

b) Sind X und Y unabhägig? (Begründung!)

c) Man berechne $E(X)$, $E(Y)$ und $VAR(Y)$!

d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2\,|\,Y=1)$!

86.) (6 Punkte) Gegeben ist die Dichtefunktion einer Zufallsgröße X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ c\,(x-2)(4-x) & \text{für} \quad 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{für} \quad x > 4 \end{cases} \quad .$$

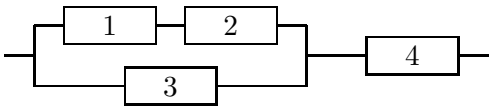
a) Man berechne den Parameter c !
b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_X(t)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X > 2.5)$ und $P(X = 3)$, die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(3 < X \leq 5 \,|\, X > 2.5)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$.
Falls Sie wider Erwarten den Teil a) nicht lösen konnten, so können Sie in b) die Ergebnisse eventuell in Abhängigkeit von c angeben.)

87) (3 Punkte) Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 seien unabhängig und standardnormalverteilt. Bestimmen Sie für die Zufallsgröße $Z = 2\,X_1 - 3\,X_2 + 5$ die Streuung $VAR(Z)$ und den Korrelationskoeffizienten
$\varrho = cov(X_2\,,\,Z) \,/\, \sqrt{VAR(X_2)\,VAR(Z)} = [E(X_2\,Z) - E(X_2)\,E(Z)] \,/\, \sqrt{VAR(X_2)\,VAR(Z)}$.

88) (5 Punkte) In der Rezeption eines großen Hotels mit 180 Zimmern weiss man, dass im Mittel 15% der Zimmerbuchungen für ein bestimmtes Wochenende nicht wahrgenommen werden. Um die Zahl der freien Zimmer nicht zu groß werden zu lassen, werden mehr als 180 Reservierungen angenommen. Dabei nehme man an, dass die individuellen Entscheidungen über das Wahrnehmen der Buchungen unabhängig getroffen werden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle erscheinenden Personen, die ein Zimmer gebucht haben, auch eins belegen können, wenn 205 Buchungen entgegengenommen wurden?
b) Wie viele Reservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestens 99% beträgt?

89) (4 Punkte) Ein System (Zuverlässigkeitsersatzschaltung) hat folgende Struktur:



Die Bauteile arbeiten bzw. fallen unabhängig voneinander aus. Das Ereignis A_i bedeute, dass das i-te Bauelement ($i = 1, 2, 3, 4$) bis zur Zeit t ausfällt, das Ereignis S bedeute, dass das System bis zur Zeit t ausfällt.

Drücken Sie die Ereignisse S und $\overline{S}$ durch die A_i aus! Mit $p_k = P(A_k)$ wird die Ausfallwahrscheinlichkeit für das k-te Bauteil, $k = 1, 2, 3, 4$, bis zur Zeit t bezeichnet. Es seien $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.1$ sowie $p_4 = 0.2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das System bis zur Zeit t nicht aus?

90) (4 Punkte) In einem Behälter liegen 30 Maschinenteile, davon sind 6 fehlerhaft. Ohne Zurücklegen werden zufällig 5 Maschinenteile entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Stichprobe

a) genau drei **fehlerhafte** Teile,

b) höchstens ein **fehlerhaftes** Teil bzw.

c) mindestens ein **fehlerfreies** Teil enthält?

Hinweis: Mit welchem Zufallsmodell können Sie arbeiten? D.h., führen Sie eine sinnvolle Zufallsgröße ein und geben Sie deren Verteilungstyp an!

91) (6 Punkte) Getreu der Just-in-Time-Devise, gemäß der die Zulieferer flexibel und kurzfristig reagieren sollen, hält eine Werkstatt keine Ersatzteile auf Lager. Bei Bedarf wird dem Zulieferer eine telefonische Order übermittelt. Die Lieferfrist (in Stunden) ist eine Zufallsgröße T mit der Dichtefunktion

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 3 \\ e^{-(x-3)} & \text{für} \quad x > 3 \end{cases} .$$

Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_T(t)$,
die Wahrscheinlichkeiten $P(4 < T \leq 6)$ und $P(T = 5)$,
die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T \leq 6 \,|\, T > 4)$,
den Erwartungswert $E(T)$ sowie den Median $q_{1/2}$.
Hinweise: T ist <u>nicht</u> ganzzahlig, z.B. $T = 3.25$ bedeutet 3 Std. 15 Min.
Der Wert $q_{1/2}$ heißt Median für die Zufallsgröße T, falls
$P(T \leq q_{1/2}) = P(T \geq q_{1/2}) = 0.5$ gilt.

92) (6 Punkte) Ein Automat stellt ein Massenprodukt her. Bekannt ist, dass 20% der Artikel Ausschuss sind. Berechnen Sie näherungsweise mit dem Grenzwertsatz von Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur)

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung vom Umfang 1600 die Anzahl der **fehlerfreien** Artikel mindestens 1264 und höchstens 1312 beträgt!

b) Wie groß darf die Anzahl n der gelieferten Teile höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 höchstens 340 Teile **fehlerhaft** sind?