Fakultät für Mathematik, Institut für Mathem. Stochastik,
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2011
Serie 7 (Signifikanztests)

Prüfung einer Hypothese über den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz

Aufgabe 97 Auf einem Weingut wird mit einem Füllautomaten Rotwein in Flaschen gefüllt. Die Füllmenge in ml kann annähernd als normalverteilt betrachtet werden. Der Inhaber behauptet, dass der Erwartungswert $E(X)$ mindestens 750ml beträgt. Ein Großabnehmer zweifelt diese Behauptung an, da eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 24$ die empirischen Kennwerte $\overline{x}_{24} = 748.9$ml und $s_{24} = 4.1$ml lieferte. Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ soll die Nullhypothese H_0 : „$E(X) = \mu_0 \; mit \; \mu_0 = 750\,ml$“ gegen die Alternativhypothese H_1 : „$E(X) < \mu_0$“ einseitig geprüft werden.

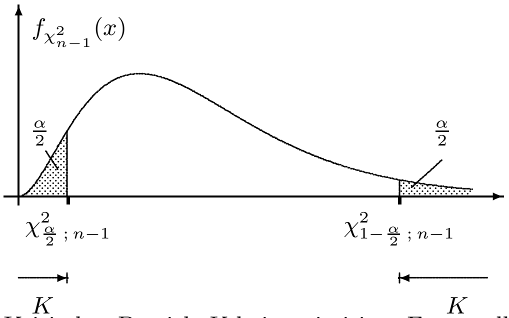
Aufgabe 98 Die Lebensdauer X einer bestimmten Sorte von Batterien ist näherungsweise normalverteilt. Der Hersteller gibt an, dass die mittlere Lebensdauer mindestens 900h beträgt. Eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 25$ ergab die Maßzahlen $\overline{x}_{25} = 892.9$h und $s_{25} = 22.4$h. Testen Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Hypothese H_0: „*Die mittlere Lebensdauer dieser Batterien beträgt* 900h“ gegen die Alternativhypothese H_1: „*Die mittlere Lebensdauer dieser Batterien ist kleiner als* 900h“!

Prüfung einer Hypothese über die Varianz σ^2 einer normalverteilten Grundgesamtheit X

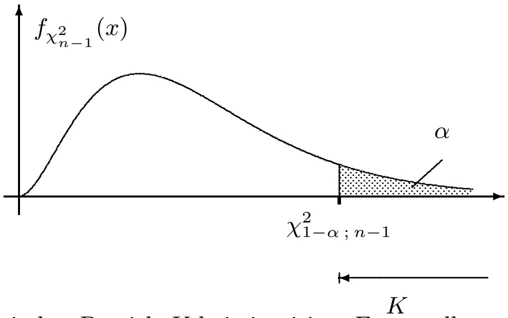
Es soll geprüft werden, ob die unbekannte Varianz $Var(X) = \sigma^2$ einer $N(\mu;\sigma^2)$-verteilten Grundgesamtheit einen bestimmten Wert σ_0^2 besitzt. Der Parameter σ^2 kann z. B. als Maß für die Genauigkeit eines Messgerätes oder als Maß für die Gleichmäßigkeit eines Fertigungsprozesses betrachtet werden.

Das Arbeitsschema für diesen Test ist:

1. $H_0 : \; \sigma^2 = \sigma_0^2$ und $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ bzw. $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.
2. Gewählt wird als Testgröße die Stichprobenfunktion
$$\mathcal{X}_{n-1}^2 = \frac{(n-1)\,S_n^2}{\sigma_0^2} \;,$$
die bei richtiger Nullhypothese χ^2-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.
3. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α.
4. Aus $P_{H_0}(\mathcal{X}_{n-1}^2 \in K\,) = \alpha$ wird der kritische Bereich K ermittelt. Mit den entsprechenden Quantilen der χ^2-Verteilung aus Tafel 3 ergeben sich:
$K = [\,0\,,\,\chi^2_{\frac{\alpha}{2}\,;\,n-1}\,] \cup [\,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}\,;\,n-1}\,,\,\infty\,)$ für $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ bzw.
$K = [\,\chi^2_{1-\alpha\,;\,n-1}\,,\,\infty\,)$ für $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.



Kritischer Bereich K bei zweiseitiger Fragestellung



Kritischer Bereich K bei einseitiger Fragestellung

5. Aus einer konkreten Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Grundgesamtheit X wird die konkrete empirische Varianz s_n^2 und damit eine Realisierung $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s_n^2}{\sigma_0^2}$ der Prüfgröße bestimmt.

6. Entscheidung: Gilt $\chi^2_{n-1} \notin K$, so wird H_0 nicht abgelehnt.
   Gilt $\chi^2_{n-1} \in K$, so wird H_0 abgelehnt.

   Wird H_0 nicht abgelehnt, so wird der Unterschied zwischen σ_0^2 und s_n^2 als zufällig angesehen, die vorhandenen Daten sprechen nicht gegen H_0. Wird H_0 abgelehnt, so ist der Unterschied zwischen σ_0^2 und s_n^2 signifikant.

Beispiel: Auf einem Automaten werden bestimmte Teile hergestellt. Für ein Merkmal X dieser Teile darf die Varianz $Var(X) = \sigma^2$ den Wert $\sigma_0^2 = 400\mu\text{m}^2$ nicht überschreiten. Entspricht die Genauigkeit der Maschine den Anforderungen? Unter der Annahme, dass X normalverteilt ist, wird mit $\alpha = 0.01$ die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 = 400$ gegen die Alternative $H_1 : \sigma^2 > 400$ geprüft. Eine entnommene konkrete Stichprobe vom Umfang 20 ergab $s_{20} = 23\mu$m. Mit dem Quantil $\chi^2_{1-\alpha\,;\,n-1} = \chi^2_{0.99\,;\,19} = 36.2$ ergibt sich als kritischer Bereich $K = [\,36.2\,,\,\infty\,)$. Die Hypothese H_0 wird nicht abgelehnt, da die Realisierung $\chi^2_{19} = \dfrac{19 \cdot 23^2}{400} = 25.13$ der Prüfgröße nicht in den kritischen Bereich fällt. Die beobachtete Stichprobe steht nicht im Widerspruch zu H_0. Der Unterschied von σ_0^2 und s_{20}^2 ist statistisch nicht gesichert. Man kann sagen, dass die eingesetzte Maschine den Anforderungen genügt.

Aufgabe 99 Ein Betrieb stellt Teile her, deren Durchmesser eine normalverteilte Zufallsgröße X ist. Eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 30$ ergab die konkrete empirische Standardabweichung $s_{30} = 31\mu$m. Die Standardabweichung als ein Maß für die Genauigkeit der eingesetzten Maschine soll nach den Angaben des Maschinenherstellers den Wert $\sigma_0 = 25\mu$m nicht überschreiten. Kann aufgrund des vorliegenden Stichprobenergebnisses die Angabe des Maschinenherstellers bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 aufrecht erhalten werden?

Aufgabe 100 Bei der Dosierung von Schüttgut ergab eine herkömmliche Methode für die abgefüllte Masse M die Standardabweichung $\sigma_0 = 0.28$ (in kg) je Füllung. Mit einer neuen technologisch einfacheren Methode erhielt man aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 5$ die empirische Standardabweichung $s = 0.39$ (in kg).
a) Man prüfe, ob sich die Standardabweichung der abgefüllten Masse M der neuen Methode signifikant von σ_0 unterscheidet (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$). Dabei gehe man davon aus, dass M normalverteilt ist.
b) Welche Aussage erhält man (bei gleichem α wie in a)), wenn der Umfang der Stichprobe, die zu der empirischen Standardabweichung $s = 0.39$ (in kg) führte, $n = 100$ ist?