Fakultät für Mathematik, Institut für Mathem. Stochastik,
Prof. Dr. G. Christoph, Dr. B. Leneke

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2012

Serie 6 (Konfidenzintervalle)
Konfidenzintervall für unbek. Erwartungswert bei bekannter Varianz
Aufgabe 93 Eine konkrete Stichprobe vom Umfang 81 stammt aus einer normalverteilten Grundgesamtheit X mit $\sigma = 3$. Als konkretes arithmetisches Mittel $\overline{x}_{81}$ wurde der Wert 48.2 ermittelt und als Konfidenzniveau 0.99 vereinbart.

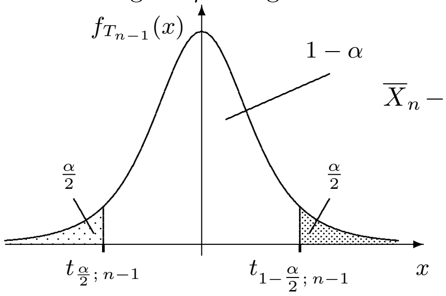
a) Bestimmen Sie ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter $\mu = E(X)$!
b) Welche konkreten Konfidenzintervalle ergeben sich für $n = 324$ bzw. $n = 9$ mit 48.2 als jeweiliges arithmetisches Mittel?
c) Wie groß müßte der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit man ein konkretes Konfidenzintervall der Länge 1 erhält?

Aufgabe 94 Der Durchmesser X (in mm) einer Sorte Werkstücke sei normalverteilt mit $\sigma = 0.26$mm. Eine konkrete Stichprobe vom Umfang 25 ergab $\overline{x}_{25} = 12.6$mm. Zu bestimmen ist ein Konfidenzintervall für μ mit dem Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$.

(5.4.1) Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit X bei unbekannter Varianz σ^2
Da σ^2 unbekannt ist, muss hier an Stelle der $N(0;1)$-verteilten Stichprobenfunktion $Z_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ die Stichprobenfunktion $T_{n-1} = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n}$ verwendet werden, die einer t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden unterliegt. Ausgehend von

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1} < T_{n-1} < t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}) = P(-t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}) = 1-\alpha$$

und dem in Tafel 2 abgelesenen Quantil $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}$ ergibt sich durch entsprechende Umformung für μ die gesuchte Konfidenzschätzung



Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit für T_{n-1}

$$\overline{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}}\,. \qquad (1)$$

Jede konkrete Stichprobe liefert eine Realisierung dieses Zufallsintervalls. Das Intervall

$$(g_u, g_0) = \left(\overline{x}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{s_n}{\sqrt{n}}\;,\;\overline{x}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$$

ist dann eine konkrete Konfidenzschätzung für den unbekannten Parameter $\mu = E(X)$.

Beispiel 5.8: Unter der Annahme, dass die Grundgesamtheit X (Abweichung vom Bezugsmaß) in Beispiel 1.1 normalverteilt mit unbekannten Parametern ist, wird für den Erwartungswert $E(X) = \mu$ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.99$ ein konkretes Konfidenzintervall gesucht. Mit dem Punktschätzwert aus Beispiel 1.1 $\overline{x}_{25} = 40.84$, der empirischen Standardabweichung $s_{25} = 1.75$ und dem Quantil $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1} = t_{0.995,24} = 2.80$ (aus Tafel 2) lautet das konkrete Konfidenzintervall

$$40.84 - 2.80\cdot\frac{1.75}{5} < \mu < 40.84 + 2.80\cdot\frac{1.75}{5} \qquad \text{und somit} \qquad 39.86 < \mu < 41.82\,.$$

Die mittlere Abweichung μ vom Bezugsmaß ist bei dem Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.99$ zwischen 39.86μm und 41.82μm zu erwarten. ◁

Aufgabe 95. Zur Untersuchung des Kupfergehaltes von Messingguss wurde eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 12$ ermittelt. Es wurden folgende Messwerte (in Prozent) beobachtet: 65.2 , 65.7 , 66.0 , 65.0 , 64.1 , 64.2 , 63.9 , 64.4 , 64.7 , 64.0 , 65.1 , 65.3 . Es sei vorausgesetzt, dass der Kupfergehalt von Messingguss eine normalverteilte Zufallsgröße X ist. Bestimmen Sie für $\alpha = 0.05$ ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter $\mu = E(X)$!

(5.4.2) Konfidenzintervall für die unbekannte Varianz σ^2 einer normalverteilten Grundgesamtheit X

Gesucht sei nun eine Konfidenzschätzung für die Varianz $Var(X) = \sigma^2$ einer normalverteilten Grundgesamtheit X. Eine erwartungstreue und konsistente Punktschätzfunktion für $\Theta = \sigma^2$ ist die Stichprobenfunktion $\hat{\Theta}_n = S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$. Für die Ermittlung eines Konfidenzintervalls für σ^2 verwendet man die Stichprobenfunktion $\mathcal{X}_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, die einer χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden unterliegt. Bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α lassen sich in Tafel 3 die Quantile $\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1}$ und $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}$ ablesen, für die

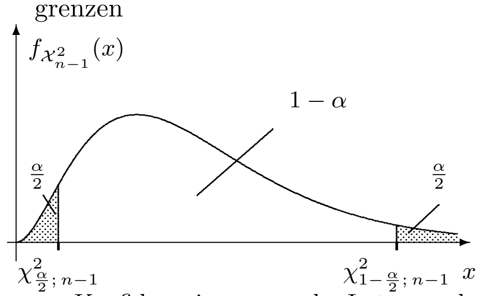
$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1} < \mathcal{X}^2_{n-1} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\right) = P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\right) = 1-\alpha \qquad (2)$$

gilt. Das Bild veranschaulicht die Beziehungen zwischen Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit. Aus (2) ergeben sich die gesuchten zufälligen Konfidenzgrenzen

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1}} \qquad (3)$$

für σ^2 zum Konfidenzniveau $(1-\alpha)$. Jede konkrete Stichprobe liefert als Realisierung des Zufallsintervalls ein konkretes Konfidenzintervall:

$$(g_u, g_o) = \left(\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}}\,,\ \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,n-1}}\right). \qquad (4)$$



Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit für $\mathcal{X}^2_{n-1}$

Beispiel 5.9: Auf einer Maschine werden Teile hergestellt, deren Durchmesser (in mm) durch eine normalverteilte Zufallsgröße X charakterisiert werden kann. Gesucht ist eine Aussage über die Fertigungsgenauigkeit (Streubreite) dieser Maschine. Dazu wird mit Hilfe einer konkreten Stichprobe vom Umfang $n = 30$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter σ^2 bestimmt. Mit der errechneten konkreten empirischen Varianz $s_{30}^2 = 0.06$ und den in Tafel 3 abgelesenen Quantilen $\chi^2_{0.025;29} = 16$ sowie $\chi^2_{0.975;29} = 45.7$ ergibt sich nach (4) das konkrete Konfidenzintervall

$$\frac{29}{45.7}\cdot 0.06 < \sigma^2 < \frac{29}{16}\cdot 0.06 \quad \text{und damit} \quad \sigma^2 \in (0.038\,,\,0.109)\,.$$

Bei dem Konfidenzniveau 0.95 gilt für die Standardabweichung $\sigma \in (0.195\,,\,0.330)$.

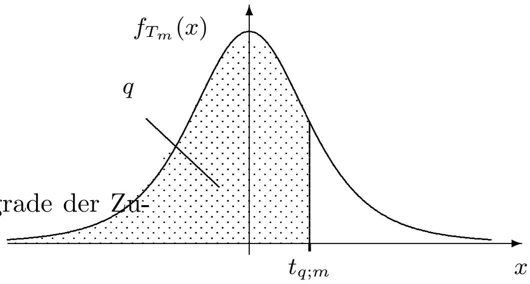
Aufgabe 96 Gegeben ist eine normalverteilte Grundgesamtheit X. Für den unbekannten Parameter σ^2 wird aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang $n = 20$ der Punktschätzwert $s_{20}^2 = 4.23$ ermittelt. Wie genau ist dieser Schätzwert? Für die Beantwortung dieser Frage ist zu der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.02$ ein konkretes Konfidenzintervall für σ^2 zu bestimmen.

Tafel 2: **Quantile $t_{q;m}$ der t-Verteilung**

$P(T_m \leq t_{q;m}) = q\,,$

$P(T_m > t_{q;m}) = 1 - q\,,$

m - Anzahl der Freiheitsgrade der Zufallsgröße T_m.

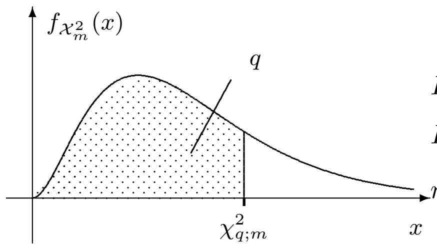


$m \backslash q$	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
50	1.68	2.01	2.40	2.68	3.26	3.50
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
70	1.67	1.99	2.38	2.65	3.21	3.44
80	1.66	1.99	2.37	2.64	3.20	3.42
90	1.66	1.99	2.37	2.63	3.18	3.40
100	1.66	1.98	2.36	2.63	3.17	3.39
110	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.38
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Beachte: $t_{q;m} = -\,t_{1-q;m}$ für $q < 0.5$.

In der letzten Zeile der Tabelle stehen die entsprechenden Quantile der Standard-Normalverteilung $z_q = t_{q;\infty}$.

Tafel 3: **Quantile $\chi^2_{q;m}$ der Chi-Quadrat (χ^2) -Verteilung**



$P(\mathcal{X}^2_m \leq \chi^2_{q;m}) = q\,,$

$P(\mathcal{X}^2_m > \chi^2_{q;m}) = 1 - q\,,$

m - Anzahl der Freiheitsgrade der Zufallsgröße $\mathcal{X}^2_m$.

$m \backslash q$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	3.8	5.0	6.6	7.9
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	6.0	7.4	9.2	10.6
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.8	9.3	11.3	12.8
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	9.5	11.1	13.3	14.9
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.4	8.3	9.6	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.0	8.9	10.3	11.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.6	9.5	11.0	12.3	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.3	10.2	11.7	13.1	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.9	10.9	12.4	13.8	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.6	78.5	82.9	86.8	135.5	140.9	147.4	151.9
120	83.9	86.9	91.6	95.7	146.6	152.2	159.0	163.6

Anmerkung:

Für große m kann $\chi^2_{q;m}$ mit Hilfe des Quantils z_q der Normalverteilung durch

$\chi^2_{q;m} \approx m\left(1 \;+\; z_q\sqrt{\frac{2}{9m}} \;-\; \frac{2}{9m}\right)^3$ approximiert werden.