Beispiel 8a) *Werfen von zwei unterscheidbaren Würfeln:*
Petra und Paula würfeln. Grundraum Ω mit den Elementarereignissen
$A_{i,j} = (i, j) = \{\textit{Petras Würfel zeigt i, Paulas Würfel zeigt j}\}$
für $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{array}$$

Ω enthält $6^2 = 36$ disjunkte gleichberechtigte Elementarereignisse (Variationen mit Wiederholungen) mit $P(\, A_{i,j}\,) = \frac{1}{36}$ für $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse sind zu berechnen:

$B = \{i < j\} = \{\textit{Petras Zahl ist kleiner als Paulas Zahl.}\}$,
$C = \{i = j\} = \{\textit{Beide Würfel zeigen dieselbe Zahl.}\}$,
$U_k = \{i + j = k\} = \{\textit{Die Summe beider Zahlen ist k.}\}$, $k = 2, \ldots, 12$.
Da ein Laplace-Versuch vorliegt, ergeben sich nach der Abzählregel
$P(B) = 15\,/\,36$, $P(C) = 6\,/\,36$ und
$P(U_{2+r}) = P(U_{12-r}) = (r + 1)\,/\,36$ für $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $\triangleleft$

Völlig analog kann man den Versuch *Zweimaliges Würfeln mit einem Würfel* behandeln, indem man das Ergebnis des ersten Wurfes notiert und dann nochmals würfelt.

Beispiel 8b) *Werfen von zwei nicht unterscheidbaren Würfeln:*
Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel sind die Würfe $(2, 5)$ und $(5, 2)$ nicht mehr unterscheidbar. Es gibt nur 21 mögliche Versuchsausgänge, da die Reihenfolge im Paar $\{i, j\}$ bedeutungslos ist. Allerdings sind die Versuchsausgänge nicht gleichberechtigt und die Laplacesche Abzählregel ist nicht anwendbar. Wie aus dem Beispiel 8a ersichtlich, gelten $P(\{4, 2\}) = 2/36$ wegen $\{4, 2\} = (4, 2) \cup (2, 4)$ und $P(\{4, 4\}) = 1/36$. $\triangleleft$

$$\begin{array}{cccc} \{1,1\} & & & \\ \{2,1\} & \{2,2\} & & \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \\ \{6,1\} & \{6,2\} & \cdots & \{6,6\} \end{array}$$

Beispiel 9) *Lotto* 6 *aus* 49*:*
Aus 49 Zahlen sind 6 Gewinnzahlen zu ziehen. Da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen bedeutungslos ist und keine Zahl mehrfach ausgewählt werden kann, liegen Kombinationen ohne Wiederholungen vor:
$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = 13\,983\,817$ mögliche gleichwahrscheinliche Fälle.
Jede dieser Fälle stellt ein Elementarereignis dar, von denen nur ein Tipp einen *Sechser*, also 6 Gewinnzahlen, darstellt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für einen *Sechser*:

$$P(Sechser) = \frac{1}{13\,983\,817} = 0.000\,000\,071\,5.$$

Um einen *Vierer* zu tippen, müssen genau 4 von 6 Gewinnzahlen und 2 der 43 falschen Zahlen angekreuzt werden.
Es gibt $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 15$ Möglichkeiten um 4 aus 6 Zahlen und $\begin{pmatrix} 43 \\ 2 \end{pmatrix} = 903$ Möglichkeiten um 2 aus 43 Zahlen auszuwählen.
Da jedes Quadrupel Gewinnzahlen mit jedem Paar falscher Zahlen auftreten kann, erhält man $15 \cdot 903 = 13\,545$ mögliche *Vierer*. Als Wahrscheinlichkeit für einen *Vierer* ergibt sich

$$P(Vierer) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{13\,545}{13\,983\,817} = 0.000969,$$

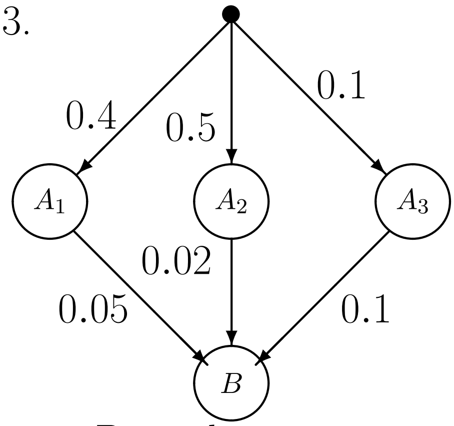
womit selbst ein *Vierer* noch ein **seltenes Ereignis** ist.

Nur falsche Zahlen werden mit Wahrscheinlichkeit

$$P(keine\ Gewinnzahl) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 43 \\ 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix}} = 0.436$$

angekreuzt. $\triangleleft$

Beispiel 10 *Wer ist schuld?*
Ein Großhändler bezieht Glühlampen von drei Betrieben, und zwar 40% aus Betrieb 1 und 50% aus Betrieb 2. Die Ausschussquoten sind 5% im Betrieb 1, 2% im Betrieb 2 und 10% im Betrieb 3.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Glühlampe defekt.



Baumdiagramm

Es seien $B = \{$*Die zufällig ausgewählte Glühlampe ist defekt.*$\}$ und $A_k = \{$*Die zufällig ausgewählte Glühlampe wurde im Betrieb k hergestellt* $\}$ für $k = 1, 2, 3$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B \mid A_k)$ ist die Ausschussquote im k-ten Betrieb und die Wahrscheinlichkeit $P(A_k)$ der Anteil aus dem k-ten Betrieb am Gesamteinkauf.
Es gelten $P(B \mid A_1) = 0.05$, $P(B \mid A_2) = 0.02$, $P(B \mid A_3) = 0.1$ sowie $P(A_1) = 0.4$, $P(A_2) = 0.5$ und $P(A_3) = 0.1$. Die drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 bilden ein vollständiges System. Es gelten $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$ und deshalb
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$ sowie wegen der Multiplikationsformel (Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(B \mid A_2)\, P(A_2) + P(B \mid A_3)\, P(A_3) \\ &= 0.05 \cdot 0.4 + 0.02 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.04\,. \end{aligned}$$

Mit Wkt. $P(B) = 0.04$ wird eine defekte Glühlampe ausgewählt.

Eine zufällig ausgewählte Glühlampe erweist sich jetzt als defekt, d. h. das Ereignis B ist eingetreten. Um diese defekte Glühlampe zu reklamieren, bestimme man die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_k \mid B)$, dass die defekte Glühlampe aus Betrieb k=1, 2 oder 3 stammt.

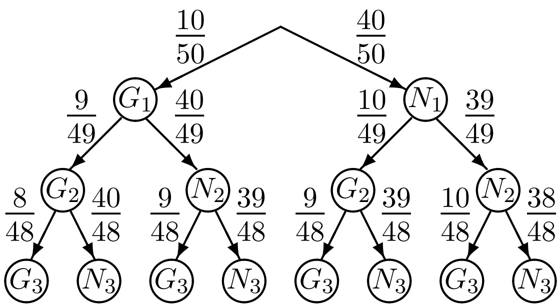
Die Bayessche Formel $P(A_k \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$ liefert

$$P(A_1 \mid B) = \frac{0.05 \cdot 0.4}{0.04} = 0.5\,, \quad P(A_2 \mid B) = \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.04} = 0.25 \quad \text{sowie}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.04} = 0.25\,.$$ Betrieb 1 bekommt die Reklamation. ◁

Beispiel 11 *Ziehen von Losen* Vor einer Losbude stehen zwei Verkäufer; der eine hat noch 1 Los im Lostopf, der andere öffnet einen neuen versiegelten Lostopf. Soll ein gerade eintreffender Spieler das letzte Los ziehen oder aus dem vollen Lostopf das erste?

Als Modell dient ein voller Lostopf mit 50 Losen, davon sind 10 Gewinne. Mit den Ereignissen $G_k = \{\textit{Gewinn im } k\textit{-ten Versuch}\}$ und $N_k = \{\textit{Niete im } k\textit{-ten Versuch}\}$ für $k = 1, 2, \ldots, 50$ bedeuten $P(G_1)$ die Wahrscheinlichkeit für ein Gewinnlos aus dem vollen Lostopf und $P(G_{50})$ die Wahrscheinlichkeit für ein Gewinnlos aus dem Lostopf mit nur einem Los. Im Bild wird ein Baumdiagramm für den dreistufigen Versuch des Losziehens mit den Verzweigungswahrscheinlichkeiten veranschaulicht. Im 1. Versuch wird von einem vollen Lostopf ausgegangen, es gilt: $P(G_1) = \dfrac{10}{50} = 0.2$ und $P(N_1) = \dfrac{40}{50} = 0.8\,.$



Baumdiagramm für das Auswählen ohne Zurücklegen

Im 2. Versuch enthält der Topf noch 49 Lose, 9 Gewinne und 40 Nieten oder 10 Gewinne und 39 Nieten in Abhängigkeit vom Ausgang des 1. Versuches. Konnte beobachtet werden, ob beim ersten Versuch ein Gewinn oder eine Niete gezogen wurden, so gelten:

$$P(G_2 \,|\, G_1) = 9/49\,, \qquad P(N_2 \,|\, G_1) = 40/49\,,$$
$$P(G_2 \,|\, N_1) = 10/49 \quad \text{und} \quad P(N_2 \,|\, N_1) = 39/49\,.$$

Man sollte also in den Topf greifen, aus dem zuvor eine Niete gezogen wurde. Ist die Vorgeschichte unbekannt, so gilt nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit wegen $\Omega = G_1 \cup N_1$ und $G_1 \cap N_1 = \emptyset$, dass

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_1) \cdot P(G_2 \,|\, G_1) + P(N_1) \cdot P(G_2 \,|\, N_1) \\ &= \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} + \frac{40}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{10}{50} = P(G_1)\,. \end{aligned}$$

Völlig analog ergibt sich $P(G_{50}) = P(G_1) = 10/50$, wenn die Vorgeschichte unbekannt ist. Es ist also egal, aus welchem Lostopf ein gerade eintreffender Spieler ein Los zieht. $\triangleleft$