Fakultät für Mathematik 13.02.2009
Prof. Dr. G. Christoph , Prof. Dr. G. Warnecke

Mathematik III für Ingenieure , Aufgaben 1 - 4:

mit einigen Lösungshinweisen zum Üben und zur Selbstkontrolle:

1. (3+3+3 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 \mathrm{x}\ \cos^{2/5} \mathrm{x}\, \mathrm{dx}\ , \qquad \text{b)} \quad \int_0^2 |\, 1 - \mathrm{x}^2 \,|\, \mathrm{dx}\, , \qquad \text{c)} \quad \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{\mathrm{y}}}\, \mathrm{dy}\, .$$

   Hinweise und Ergebnisse: 1b) und 1c) entsprechen fast wörtlich 1b und 1c der vorhergehenden Klausur.

   a) $u = \cos\, x\, ,\ du = -\ \sin\, x\, dx$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$, erst alles ersetzen, dann integrieren, $I_a = 50/119$.

   b) $I_b = \int\limits_0^1 (1 - x^2)\, dx + \int\limits_1^2 (x^2 - 1)\, dx = 2$

   c) $\sqrt{y} = u\, ,\ y = u^2\, ,\ dy = 2u\, du$, $u/(1{+}u) = 1{-}1/(1{+}u)$, $I_c = 2(2{-}\ln 3)$.

2. (4 Punkte)
   Der im 1. Oktanten liegende endliche Körper K wird von den Ebenen $x + 2\, y = 2$ und $z = 0$ sowie der Fläche $z = x^2\, y$ eingeschlossen. Skizieren den Körper K und berechnen Sie das Volumen des Körpers K!

   Hinweis und Ergebnis: (entspricht der Aufgabe 2 der alten Klausur)
   $0 \le x \le 2\, ,\ 0 \le y \le 1 - x/2\, ,\ 0 \le z \le x^2\, y$,
   Ergebnis $V_K = 4/30$. (Woher sollen hier Zylinderkoordinaten kommen?

3. (4 Punkte) Ein Massepunkt wird in einem Kraftfeld

$$\overline{F(x,y,z))} = (F_1(x,y,z)\, ,\ F_2(x,y,z)\, ,\ F_3(x,y,z)) \ = \ (\, 2\, x\, y\, z\, ,\ x^2\, z\, ,\ x^2\, y)$$

   entlang der Kurve

$$\omega : \overline{r(t)} = (x(t)\, ,\ y(t)\, ,\ z(t)) = (t\, ,\ t^2\, ,\ t^3) \quad \text{für} \quad 1 \le t \le 2$$

   bewegt. Man berechne die Arbeit $\int_\omega (\overline{F} \cdot d\overline{r}) = \int_\omega (F_1\, dx\ + F_2\, dy\ +\ F_3\, dz)$.
   Hinweise und Ergebnisse: (entspricht der Aufgabe 3a) der alten Klausur)
   $x = t\, ,\ dx = dt\, ,\ y = t^2\, ,\ dy = 2tdt\, ,\ dz = 3t^2 dt$ überall ersetzen. Ergebnis $2^7 - 1 = 127$.

4. (4+5+4 Punkte)
a) Prüfen Sie, ob die Differentialgleichung

$$(2x + 3\cos y) + (2y - 3x\,\sin y)\,y' \;=\; 0$$

exakt ist und geben Sie, falls sie es ist, deren allgemeine Lösung an!

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' \,-\, 2xy \;=\; 6x^3\,, \quad y(0) = 3.$

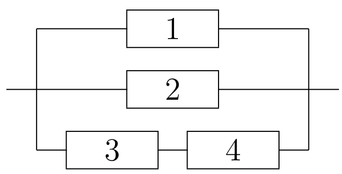
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' \,-\, y'' \;=\; 4 \,-\, e^{-x}\,.$$

Hinweise und Ergebnis: (Aufgabenteil 4a) entspricht der Aufgabe 3b,c) der alten Klausur, 4b) war neu, 4c) entspricht der alten Aufgabe 4)
a)Es sei $Pdx + Qdy = 0$. Da hier $P_y = Q_x$, ist die DGL exakt.
$F(x, y) = x^2 + 3x\cos\,y + y^2 + C$.
b) Für homogene DGL Trennung der Variablen, dann Variation der Konstanten. $y = -3(x^2 + 1) + C\,e^{x^2}$.
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$ sind Lösungen des charakteristischen Polynoms.
$y_h = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^x$. Ansatz partikuläre Lösung:
$y_p = Ax^2 + Be^{-x}$, da für $\lambda = 0$ Resonanz vorliegt,
Allgemeine Lösung: $y = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^x \,-\, 2x^2 + 0.5e^{-x}$.

Teil Stochastik für Ingenieure

5) (4 Punkte) Ein System (Zuverlässigkeitsersatzschaltung) hat folgende Struktur:



Die Bauteile arbeiten bzw. fallen unabhängig voneinander aus. Das Ereignis A_i bedeute, dass das i-te Bauelement ($i = 1, 2, 3, 4$) bis zur Zeit t ausfällt, das Ereignis S bedeute, dass das System bis zur Zeit t ausfällt.

Drücken Sie die Ereignisse S und $\overline{S}$ durch die A_i aus! Mit $p_k = P(A_k)$ wird die Ausfallwahrscheinlichkeit für das k-te Bauteil, $k = 1, 2, 3, 4$, bis zur Zeit t bezeichnet. Es seien $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.1$ sowie $p_4 = 0.2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das System bis zur Zeit t nicht aus?
Hinweise und Ergebnisse: $S = A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ und $\overline{S} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup (\overline{A}_3 \cap \overline{A}_4)$
$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0.9664$.

6) (5 Punkte) In einem Behälter liegen 20 Maschinenteile, davon sind 6 fehlerhaft. Ohne Zurücklegen werden zufällig 4 Maschinenteile entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Stichprobe

   a) genau zwei **fehlerhafte** Teile,

   b) höchstens ein **fehlerhaftes** Teil bzw.

   c) mindestens ein **fehlerfreies** Teil enthält?

   Hinweis: Mit welchem Zufallsmodell können Sie arbeiten? D.h., führen Sie eine sinnvolle Zufallsgroße ein und geben Sie deren Verteilungstyp an!
   Hinweise und Ergebnisse: $S_4 =$ Anzahl der fehlerhaften Teile von den 4 entnommenen. $S_4 \sim Hyp(20, 6, 4)$.
   a) $P(S_4 = 2) = 0.2817$.
   b) $P(S_4 \leq 1) = 0.6574$.
   c) $\{$mind. 1 fehlerfreies$\}$ entspricht $\{$höchstens 3 fehlerhafte$\}$.
   $P(S_4 \leq 3) = 1 - P(S_4 = 4) = 0.9969$.

7) (9 Punkte) Getreu der Just-in-Time-Devise, gemäß der die Zulieferer flexibel und kurzfristig reagieren sollen, hält eine Werkstatt keine Ersatzteile auf Lager. Bei Bedarf wird dem Zulieferer eine telefonische Order übermittelt. Die Lieferfrist (in Stunden) ist eine Zufallsgröße T mit der Dichtefunktion

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ e^{-(x-2)} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases} .$$

   Ermitteln und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_T(t)$,
   die Wahrscheinlichkeiten $P(3 < T \leq 5)$ und $P(T = 5)$,
   die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T \leq 5 \,|\, T > 3)$,
   den Erwartungswert $E(T)$ sowie den Median $q_{1/2}$.
   Hinweise: T ist nicht ganzzahlig, z.B. $T = 3.25$ bedeutet 3 Std. 15 Min.
   Der Wert $q_{1/2}$ heisst Median für die Zufallsgröße T, falls
   $P(T \leq q_{1/2}) = P(T \geq q_{1/2}) = 0.5$ gilt.
   Hinweise und Ergebnisse: (entspricht Aufgabe 6 der alten Klausur)

$$F_T(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(t), dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 2 \\ 1 \; - \; e^{-(t-2)} & \text{für} \quad t > 2 \end{cases} .$$

   $F_T(t)$ ist stetige, monoton wachsende Funktion, keine Sprungfunktion.

   $P(3 < T \leq 5) = F_T(5) \; - \; F_T(3) = 0.3181$, $P(T = 5) = 0$, da T stetige ZG.
   $P(T \leq 5 | T > 3) = \frac{P(3<T\leq 5)}{P(T>3)} = 0.8647$.
   $E(X) = 3$ und $q_{1/2} = 2 + \ln 2$.

8) (6 Punkte) Ein Automat stellt ein Massenprodukt her. Bekannt ist, dass 10% der Artikel Ausschuss sind. Berechnen Sie näherungsweise mit dem Grenzwertsatz von Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur)

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung vom Umfang 900 die Anzahl der **fehlerfreien** Artikel mindestens 801 und höchstens 828 beträgt!

b) wie groß die Anzahl n der gelieferten Teile höchstens sein darf, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 höchstens 100 Teile **fehlerhaft** sind?

Hinweise und Ergebnisse: (entspricht Aufgabe 8 der alten Klausur)// fehlerhaft $\neq$ fehlerfrei, leider.

a) $S_{900} \sim Bi(900, 0.9)$, S_n =Anzahl der fehlerfreien Teile:
$P(801 \leq S_{900} \leq 828) \approx 0.8357$.

b) $Z_n \sim Bi(n, 0.1)$, Z_n =Anzahl der fehlerhaften Teile:
$0.95 \leq P(Z_n \leq 100) \approx \Phi\left(\dfrac{100.5 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)$, $\Phi(1.64) = 0.95$,
$\dfrac{100.5 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}} = 1.64$, mit $\sqrt{n} = u$ quadratische Gleichung lösen,
$n = 860,66$ also 860 Buchungen.