Fakultät für Mathematik 21.07.2006
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Klausur Mathematik III/IV für Ingenieure

1.) (8 Punkte) Man löse die Anfangswertaufgabe:
$y'' + 6\,y' + 9\,y = 27\,x^2 + 5\,e^{-2x}$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$.

2.) (10 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = 3\,x^2\,y \;-\; 4\,y^3 \;-\; 3\,x^2 \;-\; 12y^2 + 3\,.$$

a) Man berechne die relativen Extrema der Funktion $z = f(x, y)$.
b) Man bestimme für $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, -1)$ die Richtungsableitungen α) in Richtung Ursprung $(0, 0)$ sowie β) in Richtung des größten Anstieges.
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene zur oben gegebenen Oberfläche $z = f(x, y)$ im Berührungspunkt $P_0 = (1, -1, f(1, -1))$!

3.) (5 Punkte) Ein Körper K wird von den Flächen $z = x^2 + y^2 + 2\,x + 10$, $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 0$ begrenzt. Berechnen Sie das Volumen des Körpers:

$$V = \int\!\!\int_K\!\!\int dx\,dy\,dz$$

(Hinweis: Wählen Sie zum Berechnen des Integrals Zylinderkoordinaten)

4.) (8 Punkte) In einem Kraftfeld $\overline{F} = (F_1\,,\,F_2) \;=\; (\,a\,x\,y^2\,,\,y\,x^2 + b\,x\,y\,)$ wird eine Masse vom Punkt $A = (1\,,\,3)$ nach Punkt $B = (2\,,\,5)$ transportiert.

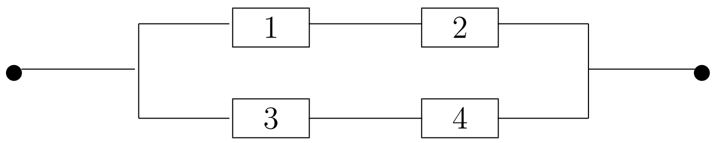
4.1) Für $a = 2$ und $b = -1$ berechne man die Arbeit
$\int_\omega \overline{F} d\overline{r} \;=\; \int_\omega (F_1 dx + F_2 dy)$, wobei der Weg ω das Stück einer Geraden ist, welche die Punkte A und B verbindet.
4.2) Für welche Werte a und b ist obiges Kurvenintegral vom Weg unabhängig. In diesem Falle bestimme man die Potentialfunktion $u(x, y)$ zum Kraftfeld $\overline{F}$.

5a.) Ergänzen Sie für den Zufallsvektor (X, Y) die folgende Verteilungstabelle!

Y / X	1	2	$P(X = x_i)$
2	?	0.3	0.7
3	?	?	?
$P(Y = y_k)$	0.5	?	?

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für Y !
b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (Begründung!)
c) Berechnen Sie die Kovarianz!

5b.) Ein System (Zuverlässigkeitsersatzschaltung) hat folgende Struktur:



Die Bauteile fallen unabhängig voneinander aus mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.3$ und $p_4 = 0.2$, wobei p_i für die Ausfallswahrscheinlichkeit des i-ten Bauteils steht.
Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems.

6.) Die zufällige Lebensdauer T einer Anlage besitzt die Dichtefunktion

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ e^{-(x-2)} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases} .$$

Ermitteln und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_T(t)$,
die Wahrscheinlichkeiten $P(3 < T \leq 5)$ und $P(T = 5)$,
den Erwartungswert $E(T)$ sowie den Modalwert $q_{1/2}$.
(Hinweis: Der Wert $q_{1/2}$ heisst Modalwert für T, falls
$P(T \leq q_{1/2}) = P(T \geq q_{1/2}) = 0.5$ gilt.)

7.) Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke X normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 10$ mm und $\sigma = 0.02$ mm. Eine Platte sei normgerecht, wenn ihre Dicke höchstens um einen Wert c vom Sollwert 10 mm abweicht.
a.) Es sei $c = 0.04$ mm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Platte normgerecht?
b.) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in a.), wenn man $X \geq 9.98$ mm als bekannt voraussetzen kann?
c.) Wie groß ist der Toleranzparameter c mindestens zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte normgerecht ist, mindestens 0.99 beträgt?

8.) Ein Vertriebsunternehmen betreibt in einer Großstadt Getränkeautomaten. Jeder Automat hat (unabhängig von den anderen) innerhalb einer Kalenderwoche mit Wahrscheinlichkeit 0.1 eine Störung.
a) Am Bahnhof befinden sich 3 Automaten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Automat defekt ist?
b) In der Stadt gibt es 900 Automaten. Für die Entscheidung über die Größe des Serviceteams ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, dass in einer Kalenderwoche die Anzahl der defekten Automaten zwischen 81 und 108 liegt.
Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace.