Fakultät für Mathematik , Prof. Dr. G. Christoph 27.09.2010

Name: .... Studiengang: ....

Mat.-Nr.: ....

Klausur Stochastik für Ingenieure der Studiengäng der FVST

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte (Soll)	8	11	5	6	5	35	
Punkte (Ist)							

Hinweise: Gewertet werden nur Lösungen, deren Rechengang logisch nachvollziehbar ist. Auf dieses Aufgabenblatt (oben) und auf jedes Lösungsblatt *Name, Matrikelnummer und Studiengang* schreiben.

1) (1+2+2+3 Punkte) Durch Versuche ist in einem Betrieb festgestellt worden, dass 5% der Relais einer großen Serie **nicht** funktionstüchtig sind. Die Relais werden in **Zehnerpackungen** geliefert.

   a) Überlegen Sie sich ein Modell mit der Zufallsgröße X als „Anzahl der **nicht** funktionstüchtigen Relais in einer Zehnerpackung“.

   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der unbrauchbaren Relais in einer Zehnerpackung genau 2 beträgt.

   c) Der Betrieb garantiert, dass sich höchstens ein **unbrauchbares** Relais in einer Packung befindet. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Garantieversprechen des Betriebes **nicht** eingehalten wird!

   d) Eine Großlieferung umfasst 500 solcher Relais-**Zehnerpackungen**. Berechnen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Großlieferung mindestens 260 Relais nicht funktionstüchtig sind.

2) (3+4+4 Punkte) Die Bedienungszeit eines Kunden sei eine Zufallsgröße X, deren Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8, & 2 < x < 10 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

   a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen.

   b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X sowie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 9 \,|\, X > 4)$.

   c) Die Kosten K sind gegeben durch $K = 2X + 10$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von K sowie den Korrelationskoeffizient $\varrho(X,K) = \Big(E\big[\big(X - E(X)\big)\big(K - E(K)\big)\big]\Big)/\sqrt{Var(X)\,Var(K)}$.

3) (3+2 Punkte) Ein Labortest zur Erkennung einer Krankheit K, an der 5% einer bestimmten Bevölkerungsgruppe leiden, besitze die folgende Wirkungsweise: Hat eine Person die Krankheit K, so zeigt der Test diese mit Wahrscheinlichkeit 0.96 auch an; hat eine Person die Krankheit K nicht, so zeigt der Test K immerhin noch mit Wahrscheinlichkeit 0.16 diese Krankheit an. Betrachten Sie die Ereignisse $K = \{\text{Krankheit liegt vor}\}$ und $B = \{\text{Test erkennt auf Krankheit}\}$. Berechnen Sie die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine zufällig aus der Bevölkerungsgruppe gewählte Person

   a) an der Krankheit K leidet, obwohl der Test „nicht K“ indizierte,

   b) an der Krankheit K nicht leidet, obwohl der Test K indizierte.

4) (2+2+2 Punkte) Eine Maschine füllt Zucker in Tüten ab, die ein Gewicht von 1 000 g haben sollen. Das tatsächliche Gewicht X (in g) lässt sich auffassen als eine $N(\mu;\sigma^2)$–verteilte Zufallsgröße.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Sollgewicht um mehr als 15 g **unterschritten** wird, wenn $\mu = 1\,000\ g$ und $\sigma^2 = 100\ g^2$ ist?

b) Wie groß darf bei $\mu = 1\,000\ g$ die Standardabweichung σ höchstens sein, damit $P(950\ g \le X \le 1\,050\ g) \ge 0.98$ gilt?

c) Gegeben sei $\sigma^2 = 100\ g^2$ (unabhängig von μ). Auf welchen Sollwert μ darf die Maschine höchstens eingestellt werden, damit $P(X \ge 1\,020\ g) \le 0.05$ gilt?

5) (3+2 Punkte) Lösen Sie **eine** der beiden Aufgaben **entweder** 5* **oder** 5**!

5*) Die Durchmesser D_1, D_2, ... von Antriebswellen seien unabhängig und normalverteilt mit dem Sollwert μ und der Standardabweichung 4 mm.

a) Überlegen Sie sich die Verteilung des **arithmetisches Mittels** für den Durchmesser $\overline{D_n} = (D_1 + ... + D_n)/n$. Zur Überwachung des Fertigungsprozesses wird der laufenden Produktion eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 25$ entnommen, deren arithmetisches Mittel für den Durchmesser $\overline{d_{25}} = 43.35\ mm$ beträgt. Berechnen Sie ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter μ zum Konfidenzniveau 0.9.

b) Wie groß ist der Stichprobenumfang n mindestens zu wählen, damit die Länge des Konfidenzintervalls für μ zum Konfidenzniveau 0.9 höchstens 0.9 ist?

5**) Die Durchmesser D_1, D_2, ... von Antriebswellen seien unabhängig und normalverteilt mit dem Sollwert μ und der Standardabweichung 4 mm.

a) Überlegen Sie sich die Verteilung des **arithmetisches Mittels** für den Durchmesser $\overline{D_n} = (D_1 + ... + D_n)/n$. Bestimmen Sie für $n = 25$ ein $c > 0$ derart, dass das zufällige Intervall $(\overline{D_n} - c\,,\,\overline{D_n} + c)$ den Parameter μ mit Wahrscheinlichkeit von 0.9 überdeckt.

b) Wie groß ist n mindestens zu wählen, damit $P(|\overline{D_n} - \mu| \le 0.45) \ge 0.9$ gilt?