Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. G. Christoph 15.09.2008

Übungsscheinklausur mit Note

Stochastik für Studiengang WLO

mit Hinweisen und Ergebnissen zur Selbstkontrolle

1. (5 Punkte) In einem Behälter liegen 8 Maschinenteile, davon sind 3 nicht normgerecht. Ohne Zurücklegen werden zufällig nacheinander jeweils ein Maschinenteil entnommen. Das Ereignis A_i bedeutet, dass das i-te ausgewählte Stück normgerecht ist $(i = 1, 2)$. Berechnen Sie a) $P(A_2)$,
b) $P(A_2 \cup A_1)$ und c) Sind die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?

Hinweise und Ergebnisse:

a) $P(A_1) = P(A_2) = 5/8$

b) $P(A_2 \cup A_1) = 50/56$

c) nicht unabhängig, da $P(A_2 \cap A_1) = 20/56 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) = 25/64$.

2. (3 Punkte) In einer Werkstückserie sind 10% der Teile nicht normgerecht. Es werden zufällig 5 Teile entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) höchstens zwei Teile nicht normgerecht sind.
b) mindestens ein Teil nicht normgerecht ist.

Hinweise und Ergebnisse: $S_5 \sim B_i(5, 0.1)$

a) $P(S_5 \leq 2) = 0.9915$

b) $P(S_5 \geq 1) = 0.4095$

3. (8 Punkte) Die Lieferfrist für ein Ersatzteil sei eine Zufallsgröße X, deren Dichtefunktion gegeben ist durch:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}\,(4 - x) & \text{für} \quad 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \quad \text{oder} \quad x > 4 \end{cases} .$$

Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X(t)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 3)$, $P(X = 2)$, die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X > 2 |\, X \leq 3)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$.

Hinweise und Ergebnisse:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t), dx = \begin{cases} 0\,, & t \leq 1 \\ (2/9)\ (4t - t^2/2 - 7/2), & 1 < t \leq 4 \\ 1\,, & t > 4 \end{cases}$$

$F_X(t)$ ist stetige, monoton wachsende Funktion, keine Sprungfunktion.
$P(X \leq 3) = F_X(3) = 8/9$, $P(X = 2) = 0$, da X stetige ZG.
$P(X > 2|X \leq 3) = 3/8$, $E(X) = 2$.

4. (5 Punkte) Ein Werkstück soll eine Bohrung von 30 mm Durchmesser erhalten. Es ist bekannt, dass der Durchmesser Y der vom Bohrautomaten erzeugten Bohrungen eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 30$ mm und $\sigma = 0.02$ mm ist. Der Toleranzbereich der Bohrungen in mm sei [29.97 , 30.04].

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bohrung innerhalb des Toleranzbereiches liegt?

   b) Durch Änderungen am Automaten wird die Standardabweichung verändert, während μ sich nicht ändert. Wie groß darf die neue Standardabweichung σ^* sein, damit nur 1% der Bohrungen einen Durchmesser Y^* größer als 30.04 mm haben?

   Hinweise und Ergebnisse:

   a) $Y \sim N(30, 0.02^2)$, $P(29.97 \leq Y \leq 30.04) = 0.9104$

   b) $Y^* \sim N(30, \sigma_*^2)$, $\sigma_* = \dfrac{0,04}{2,33} = 0.0172$

5. (6 Punkte) Ein Fähre hat 205 Autostellplätze, die im Voraus zu reservieren sind. Erfahrungsgemäß nutzen aber 10% der Besteller unabhängig voneinander ihre Reservierung nicht.
   Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace (mit Stetigkeitskorrektur)

   a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 220 Reservierungen mehr als 205 Autos die Fähre benutzen wollen.

   b) Wie groß darf die Anzahl der Buchungen höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 alle Autos einen Platz auf der Fähre finden?

   Hinweise und Ergebnisse:

   a) $S_{220} \sim B_i(220, 0.9)$, $P(S_{220} > 205) = 0.0455$

   b) $0.99 = P(S_n \leq 205) \approx \Phi\left(\dfrac{205,5 - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right)$, $\Phi(2.33) = 0.99$,
   $\dfrac{205,5 - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} = 2.33$, $\sqrt{n} = u$ setzen, quadratische Gleichung lösen,
   $n = 216,9$ also 216 Buchungen.