

**Klausur im Fach Mathematik I/II
für die Studiengänge MB, MTK, VT, EGT**

Es werden nur Aufgaben gewertet, deren Lösungsweg vollständig nachvollziehbar ist. Erlaubt sind Taschenrechner und ein A4-Blatt mit Formeln und/oder Hinweisen.

1. Man entscheide für welche Werte a und b das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + bz &= 1 \\x + by + 3z &= 2a \\x + y + 2z &= a\end{aligned}$$

- α) keine Lösung,
 β) unendlich viele Lösungen besitzt.
Geben Sie im Fall β) alle Lösungen an!

2. a) Vereinfachen Sie!

$$z = \frac{(5+i) \cdot (2-3i) - 2(4-5i)}{4 - (1+i)^2}$$

- b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2 , wenn $z_1 = 2 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)$ und $z_2 = e^{-3\pi i}$.
Stellen Sie $z_1, z_2, z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2 in der Gaußschen Zahlenebene dar!

3. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$AX + 2B = C^T + 3X$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(Welche Form muss die Matrix X besitzen, damit diese Matrixgleichung lösbar ist?) Von der Matrix A bestimme man die Eigenwerte und zum größten Eigenwert den Eigenvektor.

4. **(10 Punkte)** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1.2 \cdot e^{-0.5x}$
- Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte von $h(x) = x \cdot f(x)$.
 - Zeichnen Sie den Graph von h für $-1 \leq x \leq 6$ (Skizze).
 - $P(2, 0)$ sei der linke untere Eckpunkt eines achsenparallelen Rechtecks. Der rechte obere Eckpunkt S liege auf dem Graph von f . Wie muss S gewählt werden, damit der Inhalt des Rechtecks maximal wird?

5. **(12 Punkte)**

- Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{a(x-1)} - e^{b(x-1)}}{\ln x}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2+2x}$.
 - Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x) = (1 + x^2)^{2x}$.
 - Berechnen Sie die Integrale $\int_1^{\infty} \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx$ und $\int_1^2 x \ln x dx$.
6. **(8 Punkte)** Gegeben sei die Kurve $x(t) = 2 \tan t, y(t) = 9 \cos^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- Berechnen Sie die Tangente an die Kurve im Punkt $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
 - Berechnen Sie die Bogenlänge $s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$ der Kurve.

ZA: **(8 Punkte)** Die Stromstärke I in einem Stromkreis mit dem Widerstand R , der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung $L \frac{dI}{dt} + RI = E$.

- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, indem Sie R, L und E als konstante Größen betrachten.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $I(0) = 0$.