Musterlösung

1. Wir definieren die Ereignisse A_i-*Bauteil i fällt aus*, $i = 1, 2, 3, 4$. Diese Ereignisse sind unabhängig und haben die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1) = 0.02$, $P(A_2) = 0.05$, $P(A_3) = 0.06$, $P(A_4) = 0.1$.

   (a) Wir definieren das Ereignis *S-Schaltung fällt aus*. Dann ist

   $$\begin{aligned} P(S) =& P(\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} \cap A_4) \\ =& P(A_4) \cdot (P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\ & - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ =& P(A_4) \cdot (P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3) \\ & - P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3)) \\ =& 0.012486 \end{aligned}$$

   (b) Wir betrachten für die modifizierte Schaltung (mit n weiteren Bauteilen b_4 parallelgeschaltet) das Ereignis S_n-*modifizierte Schaltung fällt aus*. Dann ist

   $$P(S_n) = P(S) \cdot P(A_4)^n.$$

   Es soll gelten

   $$P(S_n) = 0.012486 \cdot 0.1^n \leq 0.0002.$$

   Also

   $$n \geq 2.$$

   Es müssen mindestens zwei Bauteile dazugeschaltet werden.

2. Wir betrachten die unabhängigen Ereignisse A_i-*Anlage i intakt*, $i = 1, 2$ mit $P(A_1) = 0.9$, $P(A_2) = 0.8$. Damit definieren wir die Zufallsgröße

   $$X = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{, Ereignis A tritt ein} \\ 0 & \text{, Ereignis A tritt nicht ein} \end{cases}.$$

   (a) Verteilungstabelle von X:

   $$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0.02 \\ P(X = 1) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0.26 \\ P(X = 2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.72. \end{aligned}$$

   (b)

   $$P(X \geq 1) = 0.98.$$

   (c) Verteilungsfunktion:

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0.02 & , 0 \leq x < 1 \\ 0.28 & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , 2 \leq x \end{cases}.$$

   (d) Erwartungswert:

   $$E(X) = E(\mathbf{1}_{A_1}) + E(\mathbf{1}_{A_2}) = 0.9 + 0.8 = 1.7.$$

3. (a) Wir definieren die Zufallsgröße X-*Anzahl unbrauchbarer Stücke in der Probe*. Dann ist$X$ binomialverteilt $X \sim Bi(n = 6, p = 0.1)$. Die Annahmewahrscheinlichkeit beträgt

$$P(X = 0) = 0.9^6 = 0.5314.$$

(b) Wir betrachten die Zufallsgröße Y-*Anzahl fehlerhafter Artikel in der Lieferung*. $Y \sim Bi(n = 3600, p = 0.1)$. Wir verwenden die Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur

$$\begin{aligned} P(342 \leq Y \leq 387) &= P\left(\frac{342 - 0.5 - 360}{\sqrt{324}} \leq \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{387 + 0.5 - 360}{\sqrt{324}}\right) \\ &\approx \Phi(1.53) - \Phi(-1.03) = 0.9370 - 1 + 0.8485 = 0.7855. \end{aligned}$$

4. Wir betrachten die Zufallsgröße X-*Durchmesser der Bohrung*. $X \sim N(\mu = 30, \sigma^2 = 0.04)$.

(a)

$$P(X < 29.7) = \Phi\left(\frac{29.7 - 30}{0.2}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

(b)

$$P(29.8 \leq X \leq 30.2) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826.$$

(c)

$$P(29.8 \leq X \leq 30.2 | X \geq 29.7) = \frac{P(29.8 \leq X \leq 30.2)}{P(X \geq 29.7)} = \frac{0.6826}{0.9332} = 0.7315.$$

(d) Nun ist σ unbekannt.

$$P(29.8 \leq X \leq 30.2) = 2\Phi\left(\frac{0.2}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.9$$

Umstellen liefert

$$\frac{0.2}{\sigma} \geq z_{0.95} = 1.645 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 0.1216.$$