3.6.2 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung findet Anwendung bei Lebensdauerverteilungen, der Zeitdauer bei Telefongesprächen oder auch bei der Zeitdauer für Dienstleistungen.

(a) **Herleitung**

Die Zufallsgröße T beschreibt eine Lebensdauer mit Verteilungsfunktion $F_T(x) = P(T \leq x)$ und $R_T(x) = 1 - F_T(x) = P(T > x)$ gibt die Restlebenszeit an. Wir fordern für das Modell die *Gedächtnislosigkeit*

$$P(T > s) = P(T > t + s | T > t). \tag{$\diamond$}$$

Damit erhalten wir mit $R(s) := R_T(s)$

$$\begin{aligned} R(s) = P(T > t + s|T > t) &= \frac{P(T > t + s, T > t)}{P(T > t)} = \frac{R(t + s)}{R(t)}, \quad \text{d.h.} \\ R(t + s) = R(t) \cdot R(s) & \end{aligned} \tag{$*$}$$

Die natürliche Nebenbedingung $R(0) = 1$, d.h. $P(T > 0) = 1$, besagt, dass man nur echte Lebensdauern betrachtet. Weiterhin muss $R(t)$ für $t > 0$ fallend sein, d.h.

$$R'_+ = \lim_{h \searrow 0} \frac{R(h) - 1}{h} = -\lambda < 0.$$

Mit $s = \triangle t$ erhalten wir in $(*)$ $R(t + \triangle t) = R(t) \cdot R(\triangle t)$ oder

$$\frac{R(t + \triangle t) - R(t)}{\triangle t} = R(t) \cdot \frac{R(\triangle t) - 1}{\triangle t} \underset{\triangle t \to 0^+}{\longrightarrow} R(t) \cdot (-\lambda),$$

d.h. wir erhalten eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$R'(t) = -\lambda R(t), \quad R(0) = 1.$$

Die Lösung ist offenbar $R(t) = e^{-\lambda t} = P(T > t)$ und wir erhalten

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Intensitätsparameter λ beschreibt also den rechtsseitigen Anstieg von $F_T(t)$ im Nullpunkt.

b) Erwartungswert und Varianz

Es gelten

$$\begin{aligned} E\,T &= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}, \\ E\,T^2 &= \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t} = \underbrace{\ldots}_{\text{part. Int.}} = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{und} \\ \operatorname{Var} T &= E\,T^2 - (E\,T)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert $E\,T = \frac{1}{\lambda}$ beschreibt die mittlere Lebenszeit, aber

$$P(T \leq E\,T) = F_T\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-1} = 0.63212,$$

d.h. ca. 63% der Geräte fallen *vor Erreichen* der mittleren Lebensdauer aus.

(c) **Ausfallrate**

Sei T allgemein eine Lebensdauerverteilung mit Dichte $f_T(x)$ und Verteilungsfunktion $F_T(x)$. Wir definieren die Ausfallrate

$$r_T(t) := \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}.$$

Im Falle der Exponentialverteilung $T \sim Exp(\lambda)$ gilt

$$r_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \equiv \lambda.$$

Die Exponentialverteilung ist die einzige stetige Verteilung mit konstanter Ausfallrate und die einzige stetige Verteilung mit der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit ($\diamond$).

Beispiel 3.5.2 Exponentialverteilung

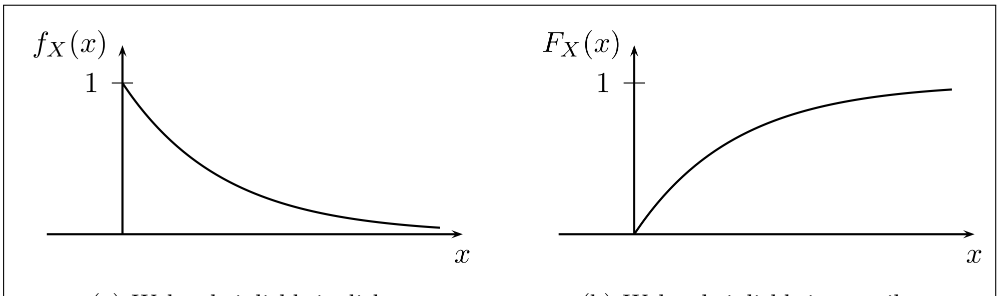
X heißt exponentialverteilt mit Intensität λ, bezeichnet mit $X \sim Exp(\lambda)$, falls X die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

besitzt. Die Verteilungsfunktion ist

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung



(a) Wahrscheinlichkeitsdichte

(b) Wahrscheinlichkeitsverteilung