4.2 Zweidimensionale Zufallsvektoren

4.1 Zweidimensionale diskrete Zufallsvektoren

Sind die Zufallsgrößen X und Y **diskret** verteit mit

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad \text{und} \quad P(Y = y_j) = q_j, \quad j \in \{0, 1, \dots, r\},$$

so nimmt der Vektor (X, Y) die Werte (x_i, y_j), $i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{0, 1, \dots, r\}$, an. Bezeichnen $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ die Einzelwahrscheinlichkeiten des Vektors (X, Y), so lässt sich die *Verteilung* des Vektors (X, Y) durch Abbildung 4.1 darstellen.

X/Y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_r	$Z\sum$
x_0	p_{00}	p_{01}	p_{02}	$\cdots$	p_{0r}	p_0
x_1	p_{10}	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1r}	p_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m0}	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mr}	p_r
$S\sum$	q_0	q_1	q_2	$\cdots$	q_r	1

Randverteilung der Komponente X:
$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{r} p_{ij}$ (Zeilen$\sum$)
Randverteilung der Komponente Y:
$q_j = P(Y = y_i) = \sum_{i=0}^{m} p_{ij}$ (Spalten$\sum$)

Abbildung 4.1. Verteilungstabelle und Randverteilungen eines diskreten Zufallsvektors (X, Y)

Beispiel 4.1. Zweimaliger Münzwurf : Es wird eine ideale Münze zweimal geworfen. Seien

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls im } i\text{-ten Wurf die Zahl erscheint,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \quad \text{und} \quad Y = X_1 + X_2\,.$$

Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind unabhängig. Die Zufallsgröße Y zählt, wie oft die Zahl bei zwei Münzwürfen erscheint, d.h. $Y = X_1 + X_2$. Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind zweipunktverteilt mit $p = 1/2$, während Y binomialverteilt mit den Parametern $n = 2$ und $p = 1/2$ ist. Die Verteilungstabellen für die Vektoren (X_1, X_2) sowie (X_1, Y) sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

X_1/X_2	0	1	$\sum$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$\sum$	1/2	1/2	1

X_1/Y	0	1	2	$\sum$
0	1/4	1/4	0	1/2
1	0	1/4	1/4	1/2
$\sum$	1/4	1/2	1/4	1

Abbildung 4.2. Verteilungstabellen von (X_1, X_2) und (X_1, Y)

Folgerung 4.1 aus Unabhängigkeitsdefinition $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$:
In einem diskreten Vektor (X, Y) *sind die Zufallsgrößen* X *und* Y unabhängig, *falls*

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot q_j \tag{4.1}$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ *und* $j \in \{0, 1, \dots, r\}$ *gelten.*

Im Beispiel 4.1 sind die Zufallsgrößen X_1 und X_2 *unabhängig*, während die Zufallsgrößen X_1 und Y *nicht unabhängig* sind, wie aus der Verteilungstabelle in Abbildung 4.2 ersichtlich ist. Es gilt z.B.

$$0 = P(X_1 = 1, Y = 0) \neq P(X_1 = 1) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\,.$$

Also sind (X_1, Y) abhängige Zufallsgrößen, ebenso (X_2, Y).

Weitere diskrete Zufallsvektoren

Beispiel 4.2. Gleichmäßig diskrete Verteilung auf Reckeck: Die *gleichmäßig diskrete Verteilung* auf den Punkten $(X, Y) = (i, k), i = 0, 1, 2, k = 0, 1, 2, 3$ ist in Abbildung 4.3 (links) dargestellt. Die *Randverteilungen* sind gleichmäßig diskrete Verteilungen und die Zufallsgrößen X und Y sind unabhängig.

X/Y	0	1	2	3	$\sum$
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/3
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/3
2	1/12	1/12	1/12	1/12	1/3
$\sum$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

X/Y	0	1	2	$\sum$
0	1/5	0	1/5	2/5
1	0	1/5	0	1/5
2	1/5	0	1/5	2/5
$\sum$	2/5	1/5	2/5	1

Abbildung 4.3: Verteilungstabellen der gleichmäßig diskreten Verteilungen,

Beispiel 4.3. Gleichmäßig diskrete Verteilung auf den Diagonalen eines Quadrates: Die *gleichmäßig diskrete Verteilung auf den Punkten der Diagonalen eines Quadrates* ist in Abbildung 4.3 (rechts) dargestellt. Die *Randverteilungen* sind keine gleichmäßigen diskreten Verteilungen mehr, die Zufallsgrößen X und Y sind auch nicht unabhängig. Dies sieht man sofort wegen

$$P(X = 0, Y = 1) = 0 \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}\,.$$

4.2 Zweidimensionale stetige Zufallsvektoren

Der Zufallsvektor (X, Y) ist stetig, falls für die gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors (X, Y)

$$F_{(X,Y)}(t, s) := P(X \leq t, Y \leq s) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy\, dx \tag{4.2}$$

für alle $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Die Funktion $f_{(X,Y)}(x, y)$ heißt *Dichtefunktion* des Vektors (X, Y) oder gemeinsame Dichte der Zufallsgrößen X und Y. Ihr Graph ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Der Körper, den diese Fläche mit der (x, y)-Ebene umschließt, hat das Volumen 1.
Jede Funktion $f(x, y)$ ist Dichtefunktion eines Zufallsvektors (X, Y), falls folgende Bedingungen erfüllt sind

$$f(x, y) \geq 0 \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1.$$

Besitzt der Vektor (X, Y) die Dichtefunktion $f_{(X,Y)}(x, y)$, so sind auch die Komponenten X und Y stetige Zufallsgrößen, deren Dichten sich aus der Dichte des Vektors (X, Y) berechnen lassen

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx. \tag{4.3}$$

Beispiel 4.4 Gleichmäßig stetige Verteilung auf Rechteck. Der Zufallsvektor (X, Y) heißt *gleichmäßig verteilt auf dem Rechteck* $R = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$, falls der Vektor (X, Y) die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}, & \text{falls } (x, y) \in R, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.4}$$

besitzt. Aus (4.3) folgt, dass die Randverteilungen auch stetige Gleichverteilungen sind

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_2 - x_1}, & \text{falls } x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{sowie} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y_2 - y_1}, & \text{falls } y \in [y_1, y_2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Beispiel 4.5 Gleichmäßig stetige Verteilung auf gedrehten Quadrat. Der Zufallsvektor (X, Y) ist gleichverteilt auf dem Quadrat $Q = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$, falls

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } |x| + |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Die Komponenten des Vektors (X, Y) hängen voneinander ab. Legt man zum Beispiel $X = x_0$ fest, so gilt $Y \in [x_0 - 1, 1 - x_0]$ (siehe Abbildung 4.3). Die Dichtefunktion der Komponenten werden mit (4.3) berechnet. Für die Komponente X gilt zum Beispiel

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy = \int_{|x|-1}^{1-|x|} \frac{1}{2} dy = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1\,.$$

Die Dichtefunktionen der Komponenten X und Y sind also

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{4.7a}$$

und

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & \text{falls } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.7b}$$

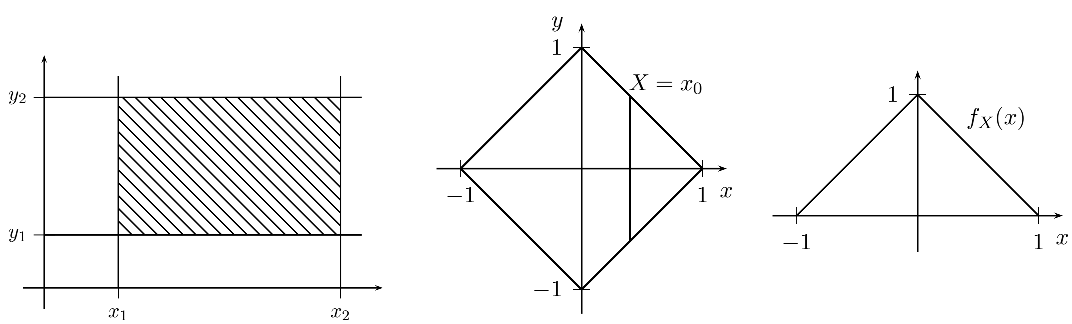

Abbildung 4.3 zu den Beispielen 4.4 und 4.5

Folgerung 4.2 aus der Unabhängigkeitsdefinition:
$F_{(X,Y)}(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})\, P(\{Y \leq y\}) = F_X(x)\, F_Y(y)$:
In einem stetigen Vektor (X, Y) *sind die Zufallsgrößen* X *und* Y unabhängig*, wenn*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{4.8}$$

gilt. Die Dichte des Vektors (X, Y) *ist also das Produkt der Dichten der Komponenten* X *und* Y*.*

Für den im Beispiel 4.4 auf dem Rechteck R gleichverteilten Vektor (X, Y) folgt aus (4.4) und (4.5), dass die Komponenten X und Y *unabhängige* Zufallsgrößen sind. Für den im Beispiel 4.5 auf dem gedrehten Quadrat Q gleichverteilten Vektor (X, Y) folgt aus (4.4) und (4.7), dass die Komponenten X und Y *keine unabhängigen* Zufallsgrößen sind, da (4.8) nicht gilt.

Beispiel 4.6. Zweidimensionale Normalverteilung

Eine zweidimensionale Normalverteilung hat die Dichte

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\} \tag{4.9}$$

mit den Parametern $\mu_i = E\,X_i, \sigma_i^2 = Var X_i, i = 1, 2$ und $-1 < \rho < 1$. In Abbildung 4.4 ist eine Dichtefunktion mit Beispielparametern dargestellt.
Mit (4.3) erhalten wir für die eindimensionalen Randverteilungen $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$. Für $i = 1$ verwendet man

$$\begin{aligned}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}& \\ = \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}(1-\rho^2) + \Bigg(\underbrace{\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}}_{=u\sqrt{1-\rho^2}\text{ (Substitution)}}\Bigg)^2.&\end{aligned}$$

Im Falle $\rho = 0$ gilt sofort $\quad f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)$.
Aus Folgerung 4.2 folgt die Unabhängigkeit von X_1 und X_2 im Falle $\rho = 0$.

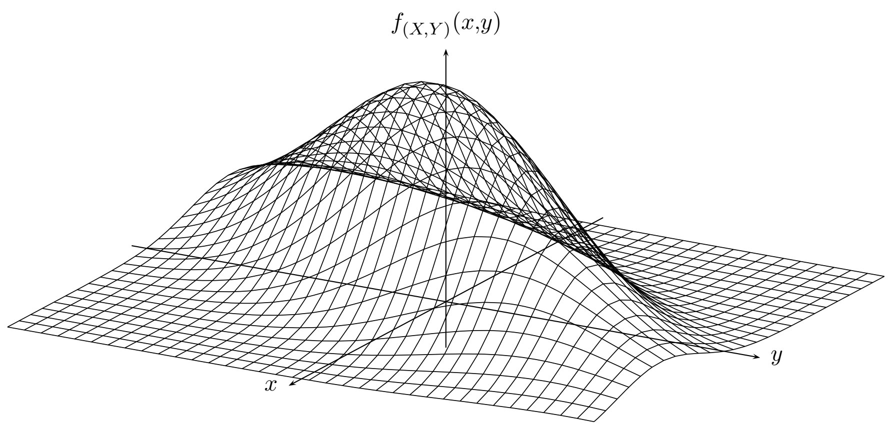

Abbildung 4.4 2D-Normalverteilung mit $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3$ und $\varrho = 0.7$