Klausur mit Lösungen für Elektrotechniker vom 21.07.2005

1. Die Intaktwahrscheinlichkeiten, bezogen auf ein festes Zeitintervall betragen für drei unabhängig voneinander arbeitende Messgeräte 0.9, 0.7 und 0.6. Man erfasse formelmäßig die Ereignisse

a) mindestens ein Gerät ist intakt,
b) genau zwei Geräte sind intakt

und berechne danach die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: A_i: i-tes Bauteil intakt und A_i seien unabhängig
$P(A_1) = 0.9, P(A_2) = 0.8, P(A_3) = 0.7$

a) A: mindestens ein Gerät intakt.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\Omega \backslash (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \\ &= 0.994. \end{aligned}$$

b) B: genau 2 Bauteile intakt.

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \\ &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \\ &= 0.216 + 0.126 + 0.056 \\ &= 0.398. \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Dichtefunktion einer Zufallsgröße X

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0 \\ \frac{2}{9} x\,(3 - x) & \text{für} \quad 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases} .$$

Ermitteln Sie

a) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
b) die Wahrscheinlichkeiten $P(X > 1)$ und $P(X = 2)$,
c) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(1.5 < X \le 4 \,|\, X > 1)$
d) sowie den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

a) Verteilungsfunktion: $$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \le 0 \\ \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3 & \text{für} \quad 0 < t \le 3 \\ 1 & \text{für} \quad t > 3 \end{cases} .$$

b) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{20}{27} \approx 0.7407.$
Da es sich um eine stetige Zufallsgröße handelt, ist $P(X=2) = 0$.

c) $P(1.5 < X \leq 4 | X > 1) = \frac{P(1.5 < X \leq 4)}{P(X>1)} = \frac{F_X(4) - F_X(1.5)}{P(X>1)} = \frac{\frac{16}{27} - \frac{1}{2}}{\frac{20}{27}} = \frac{\frac{5}{54}}{\frac{20}{27}} = \frac{1}{8} = 0.125.$

d) Erwartungswert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{9}(3x - x^2) dx = \frac{2}{9} \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx$$
$$= \frac{2}{9}\left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \left(27 - \frac{81}{4}\right) = \frac{3}{2} = 1.5.$$

3. Ein Betrieb fertigt Teile, deren Durchmesser Y eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 20\,\text{mm}$ und $\sigma = 0.02\,\text{mm}$ ist. Der Toleranzbereich sei $[19.95\ ,\ 20.04]$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gefertigtes Stück normgerecht ist?
b) Für welchen Wert b gilt $P(19.96 < Y \leq b) = 0.9450$?
c) Wir wählen beliebig 5 Teile heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens ein Teil nicht normgerecht ist?
(Hinweis: Falls Sie wider Erwarten den Teil a) nicht lösen konnten, rechnen Sie in c) mit der angenommenen Ausschusswahrscheinlichkeit von 0.05.)

Lösung: Es sei $\mu = 20$ mm und $\sigma = 0.02$ mm. Der Toleranzbereich sei [19.95 mm; 20.04 mm].

a)

$$\begin{aligned}
P(19.95 \text{ mm} \leq Y \leq 20.04 \text{ mm}) &= P\left(\frac{19.95 \text{ mm} - 20 \text{ mm}}{0.02 \text{ mm}} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{20.04 \text{ mm} - 20 \text{ mm}}{0.02 \text{ mm}}\right) \\
&= P\left(-2.5 \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq 2\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2.5) \\
&= \Phi(2) + \Phi(2.5) - 1 \\
&= 0.9772 + 0.9938 - 1 \\
&= 0.971.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(19.96 \leq Y \leq b) &= P\left(\frac{19.96 - 20}{0.02} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-20}{0.02}\right) \\
&= P\left(-2 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-20}{0.02}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-20}{0.02}\right) - \Phi(-2) \\
&= \Phi\left(\frac{b-20}{0.02}\right) - 1 + \Phi(2) \\
&= \Phi\left(\frac{b-20}{0.02}\right) - 0.0228 \\
&\overset{!}{=} 0.9450
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{b-20}{0.02}\right) = 0.9678 \Rightarrow \frac{b-20}{0.02} = 1.85 \Rightarrow b = 20.037.$$

c) Sei $n = 5$, $p = 1 - 0.971 = 0.29$ und gesucht ist höchstens ein Teil nicht normgerecht:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0.029^0 \cdot 0.971^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.029^1 \cdot 0.971^4 = 0.971^5 + 5 \cdot 0.029 \cdot 0.971^4 = 0.9921.$$