Klausur mit Lösungen für Ingenieure vom 22.07.2005

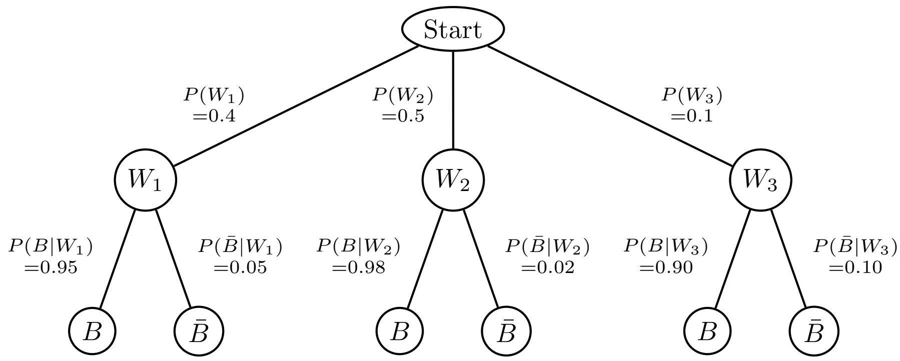
1. Ein Händler bezieht Wellen von drei Betrieben, und zwar 40 % aus Betrieb 1 und 50 % aus Betrieb 2. Die Ausschussquoten sind 5 % im Betrieb 1, 2 % im Betrieb 2 und 10 % im Betrieb 3.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Welle defekt?
b) Eine zufällig ausgewählte Welle erweist sich als defekt. Um diese defekte Welle zu reklamieren, bestimme man die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass die defekte Welle aus Betrieb 1, 2 oder 3 stammt!

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit der Beteiligung von Werk 1 ist $P(W_1) = 0.4$; die des Werkes 2 ist $P(W_2) = 0.5$ und die des Werkes 3 ist $P(W_3) = 0.1$.

Die Wahrscheinlichkeiten für Betriebsfähigkeit des jeweiligen Werkes und deren Komplement, nicht betriebsfähig, sind $P(B|W_1) = 0.95$ und damit $P(\bar{B}|W_1) = 0.05$, sowie $P(B|W_2) = 0.98$ und damit $P(\bar{B}|W_2) = 0.02$, sowie $P(B|W_3) = 0.90$ und damit $P(\bar{B}|W_3) = 0.10$.

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Welle defekt ist. Sei $\bar{B}$ das Ereignis, dass die Welle defekt ist, also nicht betriebsfähig.
Baumdiagramm:



Aus dem Baumdiagramm liest man ab:

$$P(\bar{B}) = P(W_1) \cdot P(\bar{B}|W_1) + P(W_2) \cdot P(\bar{B}|W_2) + P(W_3) \cdot P(\bar{B}|W_3) = 0.4 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.10 = 0.04.$$

b) Eine Welle sei defekt. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, ob diese aus Werk 1 , Werk 2 oder Werk 3 stammt.
Die Wahrscheinlichkeiten $P(\bar{B}|W_i)$ und $P(W_i)$ für $i = 1, 2, 3$ sind in der Aufgabenstellung gegeben und $P(\bar{B}) = 0.04$ wurde in (a) mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit berechnet. Wir benutzen jetzt die Bayessche Formel und erhalten

$$P(W_i|B) = \frac{P(W_i) \cdot P(\bar{B}|A_i)}{P(\bar{B})} \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Also

$$P(W_1|\bar{B}) = \frac{0.02}{0.04} = 0.5, \quad P(W_1|\bar{B}) = \frac{0.01}{0.04} = 0.25, \quad P(W_3|\bar{B}) = \frac{0.01}{0.04} = 0.25.$$

Beachte: Obwohl das Werk 3 die höchste Ausschussquote besitzt und aus Werk 2 der größte Anteil an Glühlampen bezogen wurde, ist die Wahrscheinlichkeit für Werk 1 am größten, die defekte Welle produziert zu haben.

2. Die Zufallsgröße X nehme die Werte 1, 2 und 3 und die Zufallsgröße Y die Werte 1 und 2 an. Dabei seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$P(X = 1) = 0.5\,,\quad P(X = 2) = 0.3\,,\quad P(Y = 1) = 0.7\,,$

$P(X = 1\,, Y = 1) = 0.35\,,\quad P(X = 3\,, Y = 1) = 0.2\;.$

a) Man stelle die Verteilungstabelle von $(X\,,\,Y)$ auf!
b) Sind X und Y unabhägig? (Begründung!)
c) Man berechne $E(X)$, $E(Y)$ und $D^2(Y)$!
d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2\,|\,Y = 1)$!

Lösung: Gegeben ist

X↓ Y→	1	2	$P(X = x_i)$
1	0.35		0.5
2			0.3
3	0.2		
$P(Y = y_k)$	0.7		

Es muss gelten: $p_{i,\cdot} = P(X = x_i)$ ist die Summe der p_{ik} über alle k und $p_{\cdot,k} = P(Y = y_k)$ ist die Summe der p_{ik} über alle i, sowie $\sum p_{i,\cdot} = \sum_{\cdot,k} = 1$.

a) Man erhält

X↓ Y→	1	2	$P(X = x_i)$
1	0.35	0.15	0.5
2	0.15	0.15	0.3
3	0.2	0	0.2
$P(Y = y_k)$	0.7		

b) unabhängig $\iff$ $P(X = x_i,\ Y = y_i) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i)$.
gilt hier nicht, da

$$0.15 = p_{21} \neq p_{\cdot,1} \cdot p_{2,\cdot} = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$$

$\Longrightarrow$ stochastisch abhängig.

c)
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 = 1.7\\
E(Y) &= \sum y_k \cdot p_k = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.3 = 1.3\\
D^2(X) &= \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 - (1.7)^2 = 0.61\\
D^2(Y) &= \mathrm{Var}(Y) = \sum y_k^2 \cdot p_{\cdot,k} - E(Y)^2 = \sum (y_k - E(Y))^2 \cdot p_{\cdot,k} =\\
&= 1^2 \cdot 0.7 + 2^2 \cdot 0.3 - (1.3)^2 = 0.21
\end{aligned}$$

d)

$$P(X \leq 2|Y = 1) = \frac{P(X \leq 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.35 + 0.15}{0.7} = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} \approx 0.7143.$$

3. Gegeben ist die Dichtefunktion einer Zufallsgröße X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ c\,(x-2)(4-x) & \text{für} \quad 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{für} \quad x > 4 \end{cases}\quad .$$

a) Man berechne den Parameter c!
b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
c) die Wahrscheinlichkeiten $P(X > 2.5)$ und $P(X = 3)$,

d) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(3 < X \leq 5 \,|\, X > 2.5)$
e) sowie den Erwartungswert $E(X)$.
Falls Sie wider Erwarten den Teil a) nicht lösen konnten, so können Sie in b) die Ergebnisse eventuell in Abhängigkeit von c angeben.)

Lösung:

a) Dichtefunktion $\Longleftrightarrow$
(a) $f_X(x) \geq 0 \Longleftrightarrow c$ muss eine positive Zahl sein,
(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{4} c\cdot(x-2)(4-x)dx + \int\limits_{4}^{\infty} 0dx \\
&= c\int\limits_{2}^{4}(-4x^2+6x-8)dx = c\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^4 \\
&= c\left(-\frac{64}{3}+48-32+\frac{8}{3}-12+16\right) = \frac{4}{3}c \\
&\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

b) Verteilungsfunktion:

$$F_X(t) = \begin{cases} & 0 & \text{für} \quad t \leq 2 \\ \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_{x=2}^{t} = & -\frac{1}{4}t^3+\frac{9}{4}t^2-6t+5 & \text{für} \quad 2 < t \leq 4 \\ & 1 & \text{für} \quad t > 4. \end{cases}$$

c) $P(X > 2.5) = 1-P(X \leq 2.5) = 1-F_X(2.5) = 1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\cdot\frac{5}{2}-5 = \frac{187}{32}-5 = \frac{27}{32} = 0.84375.$
Da X eine stetige Zufallsgröße ist, gilt $P(X=3)=0$.

d) $P(3 < X \leq 5|X > 2.5) = \dfrac{P(3 < X \leq 5)}{P(X > 2.5)} = \dfrac{F_X(5)-F_X(3)}{P(X > 2.5)} = \dfrac{1-0.5}{0.84375} = 0.59259.$

4. Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt. Bestimmen Sie für die Zufallsgröße $Z = 2\,X_1 - 3\,X_2 + 5$ die Streuung $Var(Z)$ und den Korrelationskoeffizienten

$$\varrho = \frac{cov(X_2, Z)}{\sqrt{Var(X_2)\,Var(Z)}} = \frac{E(X_2\,Z)\ -\ E(X_2)\,E(Z)}{\sqrt{Var(X_2)\,Var(Z)}}.$$

Lösung: Seien X_1 und $X_2 \sim N(0,1)$, d. h. $E(X_1) = E(X_2) = 1$, $Var(X_1) = Var(X_2) = 1$ und $Z = 2X_1 - 3X_2 + 5$. Für die Zufallsgröße Z erhält man

$$E(Z) = E(2X_1-3X_2+5) = 2\underbrace{E(X_1)}_{=0}-3\underbrace{E(X_2)}_{=0}+5 = 5$$

$$Var(Z) = Var(2X_1-3X_2+5) = 4\underbrace{Var(X_1)}_{=1}+9\underbrace{Var(X_2)}_{=1} = 4+9 = 13.$$

Berechnen jetzt

$$X_2Z = X_2(2X_1-3X_2+5) = 2X_1X_1-3X_2^2+5X_2.$$

Mit der Verschiebungsformel von Steiner erhält man für $E(X_2^2)$

$$Var(X_2) = E(X_2^2)-\underbrace{E(X_2)^2}_{=0} \Rightarrow Var(X_2) = E(X_2^2) = 1.$$

Da X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$, also

$$\begin{aligned} E(X_2Z) &= E(2X_1X_2 - 3X_2^2 + 5X_2) = 2E(X_1X_2) - 3E(X_2^2) + 5E(X_2) \\ &= 2\underbrace{E(X_1)}_{=0}\underbrace{E(X_2)}_{=0} - 3\underbrace{E(X_2^2)}_{=1} + 5\underbrace{E(X_2)}_{=0} = -3. \end{aligned}$$

Somit erhält man für den Korrelationskoeffizienten

$$\varrho = \frac{cov(X_2, Z)}{\sqrt{Var(X_2)\,Var(Z)}} = \frac{E(X_2\,Z) \,-\, E(X_2)\,E(Z)}{\sqrt{Var(X_2)\,Var(Z)}} = \frac{-3 - 0 \cdot 5}{\sqrt{1 \cdot 13}} = -\frac{3}{13}\sqrt{13} = -0.8321,$$

d. h. die Zufallsgrößen sind negativ stark korreliert.

5. In der Rezeption eines großen Hotels mit 180 Zimmern weiss man, dass im Mittel 15% der Zimmerbuchungen für ein bestimmtes Wochenende nicht wahrgenommen werden. Um die Zahl der freien Zimmer nicht zu groß werden zu lassen, werden mehr als 180 Reservierungen angenommen. Dabei nehme man an, dass die individuellen Entscheidungen über das Wahrnehmen der Buchungen unabhängig getroffen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle erscheinenden Personen, die ein Zimmer gebucht haben, auch eins belegen können, wenn 205 Buchungen entgegengenommen wurden? Wie viele Reservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestens 99 % beträgt?

Lösung: Sei n die Anzahl der Zimmerreservierungen und S_n die zufällige Anzahl der erschienenen Bucher. Dann ist S_n binomialverteilt mit n und $p = 0.85$. Zu berechnen ist $P(S_n \leq 180)$. Im Falle $n = 205$ erhält man unter Berücksichtigung der Stetigkeitskorrektur

$$P(S_{205} \leq 180) \approx \Phi\left(\frac{180 + 0.5 - 205 \cdot 0.85}{\sqrt{205 \cdot 0.85 \cdot (1 - 0.85)}}\right) = \Phi(1.22) = 0.89.$$

Wurden 205 Buchungen vorgenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit 0.89, dass alle wirklich erscheinenden Gäste ein Zimmer erhalten. Im Mittel wird das Hotel nur an 11 von 100 Wochenenden Bucher an ein anderes Hotel weitervermitteln müssen.
Weiterhin ist die größte ganze Zahl n gesucht, die $P(S_n \leq 180) \geq 0.99$ gesichert, d. h. es soll der Stichprobenumfang bestimmt werden. Es gilt

$$0.99 \leq P(S_n \leq 180) \approx \Phi\left(\frac{180 + 0.5 - n \cdot 0.85}{\sqrt{n \cdot 0.85 \cdot (1 - 0.85)}}\right).$$

Mit dem Quantil $z_{0.99} = 2.33$ der Standardnormalverteilung ergibt sich

$$2.33 \leq \frac{180 + 0.5 - n \cdot 0.85}{\sqrt{n \cdot 0.85 \cdot (1 - 0.85)}} = \frac{180.5 - n \cdot 0.85}{0.3571 \cdot \sqrt{n}} \Rightarrow n \leq 198.$$

Es dürfen also nur 198 Buchungen vorgenommen werden, um mit 99 %-iger „Sicherheit“ keine Bucher weitervermitteln zu müssen.