Klausur mit Lösungen für Ingenieure (Logistik) vom 26.09.2006

1. Die Produktion einer Abteilung wird von zwei Kontrolleuren mit den Anteilen 30 % bzw. 70 % sortiert. Bekannt ist, dass der erste bzw. zweite Kontrolleur mit Wahrscheinlichkeit 0.03 bzw 0.05 eine Fehlentscheidung trifft.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Teil richtig einsortiert wurde.
b) Beim Versand wird ein fehlsortiertes Teil gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es vom ersten bzw. vom zweiten Kontrolleur sortiert.
Hinweis: Geben Sie erst die interessierenden Ereignisse an und berechnen Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: K: Kontrolleur 1 sortiert Bauteil: $P(K) = 0.3$
$\bar{K}$: Kontrolleur 2 sortiert Bauteil (d. h. also nicht Kontrolleur 1): $P(\bar{K}) = 0.7$
F: Kontrolleur trifft Fehlentscheidung
$\bar{F}$: Kontrolleur trifft keine Fehlentscheidung:

$$P(F|K) = 0.03, \quad P(F|\bar{K}) = 0.05, \qquad P(\bar{F}|K) = 0.97, \quad P(\bar{F}|\bar{K}) = 0.95.$$

Zunächst ermitteln wir die fehlenden Wahrscheinlichkeiten, wozu wir eine Vierfeldertafel verwenden.

	F	$\bar{F}$	
K	0.009	0.291	$\underline{0.3}$
$\bar{K}$	0.035	0.665	$\underline{0.7}$
	0.044	0.956	$\underline{1}$

Die gegebenen Werte sind unterstrichen.

Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus

$$P(F|K) = \frac{P(F \cap K)}{P(K)} \Rightarrow P(F \cap K) = P(K)P(F|K) = 0.009$$

und

$$P(\bar{F}|\bar{K}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{K})}{P(\bar{K})} \Rightarrow P(\bar{F} \cap \bar{K}) = P(\bar{K})P(\bar{F}|\bar{K}) = 0.665.$$

a) Aus der Vierfeldertafel lesen wir

$$P(\bar{F}) = P(K) \cdot P(\bar{F}|K) + P(\bar{K}) \cdot P(\bar{F}|\bar{K}) = 0.956$$

ab.

b) Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich zu

$$P(K|F) = \frac{P(K \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F \cap K)}{P(F)} = \frac{P(F|K) \cdot P(K)}{P(F)} = \frac{0.03 \cdot 0.3}{0.044} = 0.2045,$$

$$P(\bar{K}|F) = \frac{P(\bar{K} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F \cap \bar{K})}{P(F)} = \frac{P(F|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}{P(F)} = \frac{0.05 \cdot 0.7}{0.044} = 0.7955.$$

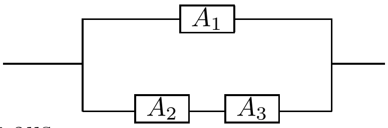
2. Zwei Schützen schießen unter denselben Bedingungen gleichzeitig auf eine Scheibe. Schütze A hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0.8. Schütze B hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0.7. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe getroffen?

Lösung: A: Schütze 1 trifft die Scheibe $P(A) = 0.8$
B: Schütze 2 trifft die Scheibe $P(B) = 0.7$
C: Scheibe getroffen, wenn mindestens einer die Scheibe trifft $C = A \cup B$.
Da A und B unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned} P(C) = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \cdot 0.7 \\ &= 1.5 - 0.56 \\ &= 0.940. \end{aligned}$$

Anderer Weg: $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.94.$

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die angegebene Schaltung aus, wenn die Bauelemente A_1, A_2 und A_3 mit den Wahrscheinlichkeiten 0.4, 0.2 bzw. 0.3 ausfallen?



Lösung: $\bar{A}_i$: i-tes Bauteil fällt aus,
S: Schaltung funktioniert, d. h. $S = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$
$\bar{S}$: Schaltung funktioniert nicht, d. h. mit de Morgan folgt

$$\bar{S} = \overline{A_1 \cup (A_2 \cap A_3)} = \bar{A}_1 \cap (\overline{A_2 \cap A_3}) = \bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3).$$

Da A_i stochastisch unabhängig erhalten für die Ausfallwahrscheinlichkeit der Schaltung S

$$\begin{aligned} P(\bar{S}) &= P(\bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \\ &= P(A_1)(P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) - P(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)) = 0.4 \cdot (0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot .0.6) = 0.152. \end{aligned}$$

4. Eine diskrete Zufallsgröße besitze die beiden Realisierungen x_1 und x_2 mit den Einzelwahrscheinlichkeiten p_1 und p_2. Es sind bekannt: $x_2 = 6$, $p_1 = 0.4$ und $E(X) = 4$. Berechnen Sie x_1 und p_2 !

Lösung: Gegeben ist die diskrete Zufallsgröße X mit folgender Verteilungstabelle

x_i	x_1	6
p_i	0,4	p_2

Da X eine diskrekte Zufallsgröße ist, muss gelten

$$1 = 0.4 + p_2 \Longrightarrow p_2 = 0.6$$

und aus dem Erwartungswert

$$E(X) = x_1 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.6 \overset{!}{=} 4 \Rightarrow x_1 = 1.$$

5. Getreu der Just-in-Time-Devise, gemäß der die Zulieferer flexibel und kurzfristig reagieren sollen, hält ein PKW-Produzent nur eine geringere Anzahl von Anlassern auf Lager. Bei Bedarf wird dem Zulieferer eine telefonische Order übermittelt. Die zufällige Lieferzeit X schwankt zwischen einer bis vier Stunden gemäß der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x-1)(4-x) & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie für die Zufallsgröße Lieferfrist X.

a) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
b) die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 3)$, $P(X > 2)$ und $P(X \leq 3)$,
c) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 3 \,|\, X > 2)$ sowie

d) den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

a) Verteilungsfunktion: $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 1 \\ \frac{2}{9}\left(-\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 4t + \frac{11}{6}\right) & \text{für} \quad 1 \le t \le 4 \\ 1 & \text{für} \quad t > 4. \end{cases}$

Begründung:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \frac{2}{9}\int_{1}^{t}(x-1)(4-x)dx \\ &= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^t = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 4t - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right)\right) \\ &= \frac{2}{9}\left(-\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 4t + \frac{11}{6}\right). \end{aligned}$$

b) $P(X = 3) = 0$, da X eine stetige Zufallsgröße ist.
$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2}{9}\left(-\frac{8}{3} + 10 - 8 + \frac{11}{6}\right) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27} \approx 0.7407$
$P(X \le 3) = F_X(3) = \frac{2}{9}\left(-9 + \frac{45}{2} - 12 + \frac{11}{6}\right) = \frac{20}{27} \approx 0.7407.$

c) $P(X \le 3 | X > 2) = \frac{P(2 < X \le 3)}{P(X > 2)} = \frac{F_X(3) - F_X(2)}{P(X > 2)} = \frac{\frac{2}{27} - \frac{7}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{\frac{13}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{13}{20} = 0.65.$

d) Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{1}^{4} x \cdot f(x)\ dx = \frac{2}{9}\int_{1}^{4} x(x-1)(4-x)\ dx \\ &= \frac{2}{9}\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2\right]_1^4 \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße X hat also den Erwartungswert 2.5.

6. Die Brenndauer einer Sorte von Glühlampen ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 1500$ Stunden und der Standardabweichung 150 Stunden.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass solch eine Glühlampe höchstens 1725 Stunden brennt.

b) Zur Beleuchtung eines Raumes stehen 4 solcher Glühlampen zur Verfügung. Brennt eine Glühlampe durch, so wird sofort die nächste eingesetzt.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Beleuchtung für diesen Raum für mindestens 6600 Stunden vorhanden ist.

Lösung: X: Brenndauer einer Sorte von Glühlampen $X \sim N(1500, 150^2)$

a) gesucht: $P(Y \leq 1725)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1725) &= P\left(Y \leq \frac{1725-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1725-1500}{150}\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{225}{150}\right) \\ &= P(Y \leq 1.5) \\ &= \Phi(1.5) \\ &= 0.9332. \end{aligned}$$

b) X: 4 Glühlampen mit der Brenndauer, $\mu_1 = 1500$ h $= \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

$$\mu_{ges} = 4 \cdot 1500 \text{ h} = 6000 \text{ h}$$

$\sigma_1 = 150$ h $= \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$.

$$\sigma_{ges}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 = 4 \cdot (150 \text{ h})^2$$

also

$$\sigma_{ges} = \sqrt{4 \cdot (150 \text{ h})^2} = 2 \cdot 150 \text{ h} = 300 \text{ h}.$$

Gesucht ist $P(X \geq 6600 \text{ h})$

$$\begin{aligned} P(X \geq 6600 \text{ h}) &= P\left(Y \geq \frac{6600 \text{ h} - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Y \geq \frac{6600 \text{ h} - 6000 \text{ h}}{300 \text{ h}}\right) \\ &= P\left(Y \geq \frac{600}{300}\right) \\ &= P(Y \geq 2) \\ &= 1 - P(Y < 2) \\ &= 1 - \Phi(2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228. \end{aligned}$$

7. Ein größerer Lieferposten enthält nach Angaben des Herstellers 10 % unbrauchbare Teile.

a) Diesem Posten wird nach dem Auswahlschema mit Zurücklegen eine Probe vom Umfang 3 entnommen. Enthält die Probe höchstens ein unbrauchbares Stück, so wird die Lieferung nicht zurückgewiesen. Gesucht ist die Annahmewahrscheinlichkeit der Lieferung.

b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung vom Umfang 3600 die Anzahl der fehlerhaften Artikel mindestens 342 und höchstens 387 beträgt!

Lösung: X: i-tes Stück ist brauchbar. $X_i \sim Bi(n, p = 0.10)$.

a) Umfang 3: Lieferung wird angenommen, wenn höchstens ein unbrauchbares Stück enthalten ist, $X \sim Bi(3, 0.1)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{3}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^3 + \binom{3}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^2 = 0.972.$$

Die Annahmewahrscheinlichkeit beträgt 97.2 %.

b) Der Umfang ist $n = 3600$. $\sim Bi(3600, 0.1)$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Gesucht ist $P(342 \leq X \leq 387)$. Wir überprüfen, ob der zentrale Grenzwertsatz benutzt werden kann.

$$Var(S_n) = np(1-p) = 3600 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 324 > 9.$$

Sei $S_n \sim N(360, 324)$.

- Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(342 \leq S_n \leq 387) &= P\left(\frac{342-360}{\sqrt{324}} \leq \frac{S_n - 360}{\sqrt{324}} \leq \frac{387-360}{\sqrt{324}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{27}{\sqrt{324}}\right) - \Phi\left(\frac{-18}{\sqrt{324}}\right) \\
&= \Phi(1.5) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1.5) - 1 + \Phi(1) \\
&= 0.9332 - 1 + 0.8413 \\
&= 0.7745.
\end{aligned}$$

  Die Wahrscheinlichkeit einen fehlerhaftes Teil zu finden, beträgt 77.45 %.
- Mit Stetigkeitskorrektur

$$\begin{aligned}
P(342 \leq S_n \leq 387) &= P\left(\frac{342-360-0.5}{\sqrt{324}} \leq \frac{S_n - 360}{\sqrt{324}} \leq \frac{387-360+0.5}{\sqrt{324}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{27+0.5}{\sqrt{324}}\right) - \Phi\left(\frac{-18-0.5}{\sqrt{324}}\right) \\
&= \Phi(1.53) - \Phi(-1.03) \\
&= \Phi(1.53) - 1 + \Phi(1.03) \\
&= 0.9370 - 1 + 0.8485 \\
&= 0.7855.
\end{aligned}$$

  Die Wahrscheinlichkeit einen fehlerhaftes Teil zu finden, beträgt 78.55 %.