Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastische Prozesse
(Sose 2012, Serie 1)

1. Es sei N_T ein homogener Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie für $t_1 < t_2$
a) $P(N(t_2) = k_2 \mid N(t_1) = k_1)$, b) $P(N(t_1) = k_1 \mid N(t_2) = k_2)$.

2. $\{X(t);\, t \geq 0\}$ und $\{Y(t);\, t \geq 0\}$ seien unabhängige homogene Poisson-Prozesse mit den entsprechenden Parametern λ_1 und λ_2. Es seien
a) $Z_1(t) = X(t) + Y(t)$,
b) $Z_2(t) = X(t) - Y(t)$ und
c) $Z_3(t) = X(t) + k$ (hierbei sei k eine fest vorgegebene natürliche Zahl).
Welche der angeführten Prozesse haben unabhängige Zuwächse, welche sind Poisson-Prozesse?

3. Es sei N_T ein homogener Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda > 0$.
Berechnen Sie die Erwartungswertfunktion $m(t) = E\,N(t)$, die Kovarianzfunktion $Cov(s,t)$ und $E(N(t)\,N(s))$. (Beispiel 3.2)

4. Es sei $\{N(t);\, t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda > 0$ und $T > 0$ eine Konstante.
a) Berechnen Sie $E\left(\frac{N(t)}{t} - \lambda\right)^2$ und leiten Sie daraus das Gesetz der Großen Zahlen für den homogenen Poisson-Prozess ab.
b) Berechnen Sie Mittelwert und Streuung des sogenannten Stichprobenmittels

$$M_T(w) = \frac{1}{T}\int_0^T N(t,w)dt\ ,\ w \in \Omega\,.$$

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ein n-dimensionaler zufälliger Vektor mit der gemeinsamen Verteilung $P_{X_1,\ldots,X_n}$ im $\mathbb{R}^n$. Bekanntlich versteht man unter der *charakteristischen Funktion* des Vektors $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ die auf $\mathbb{R}^n$ definierte komplexwertige Funktion: für $s = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $x = (x_1, ..., x_n)^T$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_X(s) := \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)^T}(s_1, \ldots, s_n) &= E\mathrm{e}^{i\sum_{k=1}^n s_k X_k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\sum_{k=1}^n s_k x_k} d\,P_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

5.) Ist der Vektor $X = (X_1, ..., X_n)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ mehrdimensional normalverteilt mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)^T$ und Kovarianzmatrix Σ, so besitzt X die charakteristische Funktion

$$\varphi_X(s^T) = \exp\{i\, s^T \mu - (1/2) s^T \Sigma\, s\}\,, \quad s = (s_1, ..., s_n)^T\,. \tag{2}$$

Weiterhin sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeigen Sie (Satz 3.4), dass der Vektor $Y = A\,X \sim N(A\,\mu\,,\ A\,\Sigma\,A^T)$ m-dimensional normalverteilt ist.

6.) Es seien $X = (X_1, ..., X_n)^T$ mit i.i.d. Komponenten $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $A = (a_{i,j})_{i,j=1,...n}$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{i,j} = 1$ für $i \geq j$ und $a_{i,j} = 0$ sonst (wie in Beispiel 3.3). Man bestimme Mittelwertvektor und Kovarianzmatrix vom Gaußvektor $Y = A\,X$.

7.) X_1, X_2, X_3 seien unabhängige Zufallsgrößen, $X_i \in N(0, i^2)$. Man bestimme die gemeinsame Dichte des Vektors $(X_2, X_3 - X_2, X_1 - X_2 + X_3)$.

8.) Es sei $Y \sim N(0\,,\,\sigma^2)$. Berechnen Sie $E(|Y|^k)$ für $k = 1, 2, ...$

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein n-dimensionaler zufälliger Vektor mit der gemeinsamen Verteilung $P_{X_1,\ldots,X_n}$ im $I\!R^n$. Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass die Zufallsgrößen X_1, $X_2 - X_1$, ... , $X_n - X_{n-1}$ (in ihrer Gesamtheit) voneinander unabhängig sind.
Aus Lemma 2.5 folgt, dass dann für alle $s = (s_1, \ldots, s_n)^T \in I\!R^n$ gilt:

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(s_1, \ldots, s_n) = \varphi_{X_1}(s_1 + \ldots + s_n) \cdot \prod_{k=2}^{n} \varphi_{X_k - X_{k-1}}(s_k + \ldots + s_n)\,. \tag{3}$$

Da $E(e^{itX}) = E(e^{itY}) \iff F_X(x) = F_Y(x)$ gilt, folgt insbesondere, dass die gemeinsame Verteilung $P_{X_1,\ldots,X_n}$ eindeutig durch die Verteilungen von X_1, $X_2 - X_1$, ... , $X_n - X_{n-1}$ bestimmt ist.

9.) Mit Formel (3)
α) beweise man: Ist $W(t)$ ein (Standard)-Wienerprozess, so sind auch
$W_1(t) = -W(t),\ t \in [0, \infty)$
$W_2(t) = c \cdot W(t \cdot c^{-2}),\ c > 0,\ t \in [0, \infty)$ (Standard)-Wiener Prozesse.
β) und zeige die 0.5-Selbstähnlichkeit des Wiener Prozesses:

$$(\sqrt{T}\,W(t_1), ..., \sqrt{T}\,W(t_n)) =^d (W(Tt_1), ..., W(Tt_n))$$

$X =^d Y$ bedeutet, dass X und Y identisch verteilt sind,
d.h. $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ für alle $x \in I\!R^n$, ihre charakteristischen Funktionen sind gleich.

10.) $W(t)$ bezeichne den Wiener Prozess, $L > 0$ und $\sigma > 0$ Konstanten sowie A eine von $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ unabhängige $N(\mu, \tau^2)$ - verteilte Zufallsgröße. Man berechne Mittelwert- und Kovarianzfunktion folgender Prozesse

a) $X_1(t) = W(t + L) - W(L)$

b) $X_2(t) = W(t + L) - W(t)$

c) $X_3(t) = A \cdot t + \sigma \cdot W(t)$

d) $X_4(t) = \begin{cases} (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right) & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \quad t \geq 1\,. \end{cases}$

11.) Der stochastische Prozeß $Y(t)$ habe die Gestalt $X(t) = a + X \cdot t$ mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Man bestimme die Dichte $f_{Y(t)}(x)$, $E(Y(t))$ und $\mathrm{Cov}_Y(t, s)$. Dabei sei a eine nichtzufällige Konstante.