Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastische Prozesse
(S0Se 2012, Serie 2, Markovketten)

12.) Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet, sei 0.6, wenn es heute regnet. Ist es heute sonnig, wird dies mit Wahrscheinlichkeit 0.9 auch morgen so sein.
a) Bestimmen Sie die Matrix der einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten!
b) Ermitteln Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten!

13.) Man untersuche, ob folgende Markovketten zusammenhängend sind, klassifiziere die Zustände und untersuche das Rekurrenzverhalten!

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

14.) Ein Teilchen bewegt sich auf der Umlaufbahn, auf der (im Uhrzeigersinn) die Punkte 0, 1, 2, 3 und 4 markiert sind. Das Teilchen startet im Punkt 0. Zu jedem Zeitpunkt rückt es mit Wahrscheinlichkeit q im Uhrzeigersinn (0 folgt auf 4) einen Punkt weiter und mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Es sei X_n $(n \geq 0)$ sein Standort auf der Kreisbahn. $\{X_n\}$ ist eine Markov–Kette.

a) Ermitteln Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten!

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten!

15.) a) Durch die Übergangsmatriz Π_4 aus Aufgabe 13 sei eine homogene Markov–Kette gegeben. Man berechne die Grenzwahrscheinlichkeiten $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)}$ und die stationäre Verteilung, falls diese existiert.
b) Bestimmen Sie auch die stationären Verteilungen zu den anderen Übergangsmatrizen aus Aufgabe 13, falls diese existieren.

16.) Gegeben sei eine Markovkette mit 2 Zuständen, den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{11} = p_{22} = p,\ p_{12} = p_{21} = q$ $(0 < p < 1$ und $p + q = 1)$ und der Anfangsverteilung $P(X_0 = 1) = a,\ P(X_0 = 2) = 1 - a$. Bestimmen Sie die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{jk}^{(n)}$, die absoluten Wahrscheinlichkeiten $p_j^{(n)}$ und die Grenzwahrscheinlichkeiten $p_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}$! Was ergibt sich in den Sonderfällen $p = 0$ und $p = 1$?

17.) Eine Brücke in Wien ist so alt, dass bis auf weiteres mit folgender Brückenbauer(n)regel gerechnet werden kann: „Steht die Brücke noch, so stürzt sie beim nächsten Überqueren mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein.“
a) Nehmen Sie an, dass die Brücke im Augenblick noch steht und beschreiben Sie ihren zukünftige Zustand durch eine Markov–Kette. Geben Sie die Übergangsmatrix und die Ausgangswahrscheinlichkeiten an.
b) In welcher Einheit werden die Stufen gemessen? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Übergangsdauer von Zustand 0: „Die Brücke steht.“ in den Zustand 1: „Die Brücke steht nicht mehr.“ genau 2 Stufen beträgt.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Übergangsdauer von Zustand 0 in den Zustand 1 genau n Stufen beträgt.
d) Welche Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten stellen sich ein?
e) Zeigen Sie, dass die Brücke irgendwann einstürzen muss!
f) Bestimmen Sie die erwartete „Lebensdauer“ der Brücke!
g) Wird eine Überquerung (sofern noch möglich) im Laufe der Zeit gefährlicher, wenn man nicht weiß, wieviele Überquerungen die Brücke schon standgehalten hat?

18.) Nehmen Sie an, der Markt für Waschmittel sei auf die drei Produkte Ariel, Persil und Skip beschränkt und lasse sich durch eine Markov–Kette mit diesen drei Zuständen beschreiben. Für die Kaufübergangswahrscheinlichkeiten sei bekannt, dass sich ein Persil–Käufer mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% das nächste Mal für Ariel und mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% für Skip entscheidet, wogegen ein Ariel–Käufer das nächste Mal alle drei Marken mit gleicher Wahrscheinlichkeit kauft. Über die Skip–Benutzer weiß man, dass sie nicht zu Persil umsteigen und dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% markentreu sind.
a) Bestimmen Sie die vollständige einstufige Übergangsmatrix und skizzieren Sie den Transitionsgraphen!
b) Am Anfang von Periode 1 teilen sich Ariel und Persil 90% des Marktes je zur Hälfte auf. Wie lauten die Marktanteile der drei Hersteller am Ende von Periode 1?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Persil–Käufer nach 3 Perioden zum ersten Mal Skip benutzt? Wie lange dauert es im Durchschnitt, bis ein Persil–Käufer Skip benutzt?
d) Berechnen Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten!
e) Welche Kundentreue muss Persil erreichen, um langfristig den gleichen Marktanteil wie Skip zu bekommen, wenn die Kaufübergangswahrscheinlichkeit von Persil zu Ariel weiterhin 10% beträgt?

19.) Untersuchen Sie die folgende Markov–Kette mit den Zuständen 1, 2, 3, 4 und 5 auf Zusammenhang und Periodizität:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die Zustände 3 und 5 auf Rekurrenz und berechnen Sie die Absorbtionswahrscheinlichkeiten! Bestimmen Sie auch $\lim_{n\to\infty} P^n$!

Ein Lagerhaltungsproblem:
Ein Fotogeschäft führt ein Kameramodell, das jede Woche nachbestellt werden kann. D_i sei die (zufällige) Nachfrage nach dieser Kamera in der i-ten Woche, $i = 1, 2, \ldots$ Die Zufallsvariablen $D_1, D_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit (unbekannter) gemeinsamer Verteilungsfunktion F.

X_0 sei der anfängliche Kamerabestand und

X_i sei der Lagerbestand am Ende der i-ten Woche, $i = 1, 2, \ldots$

Das Fotogeschäft verfolgt die nachstehende Bestellpolitik:

Ist am Wochenende keine Kamera auf Lager, so wird der Bestand auf 3 Kameras aufgefüllt. (Lieferung bis Montag vor Öffnung des Ladens.)

Nachfragen, die den vorhandenen Bestand übersteigen, gehen verloren.

Die Lagerbestände $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ bilden einen stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\in T}$ mit der diskreten Zeit $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und diskretem Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, 3\}$ (mögliche Bestände am Wochenende). Die Zufallsvariablen $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ sind voneinander abhängig und lassen sich iterativ darstellen:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{(3 - D_{t+1}), 0\} & \text{für } X_t = 0 \\ \max\{(X_t - D_{t+1}), 0\} & \text{für } X_t \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

Für die Realisierungen $X_0 = 2,\ D_1 = 4,\ D_2 = 2,\ D_3 = 1,\ D_4 = 0$ ergeben sich fr den Prozess $\{X_t\}$ folgende Werte X_i für $i = 0, 1, 2, 3, 4,$:

$X_0 = 2$ (Anfangsbestand),
$X_1 = 0$ (2 Forderungen gehen verloren, Bestellung von 3 Kameras),
$X_2 = 1$ (keine Bestellung),
$X_3 = 0$ (Bestellung von 3 Kameras),
$X_4 = 3$ (keine Bestellung).

Die Folge der Zufallsvariablen $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ bildet eine Markov–Kette (X_i : Bestand am Ende der i–ten Woche vor eventueller Lieferung).

Die Nachfrage $D_1, D_2, \ldots$ seien nun unabhängige, Poisson–verteilte Zufallsvariablen mit $\lambda = 1$, d. h. für $m = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$P(D_m = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}\bigg|_{\lambda=1} = \frac{1}{k!\, e}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(Beachte: $0! = 1! = 1$.) Somit ergeben sich für beliebiges $m \geq 0$

$$P(D_m = 0) = P(D_m = 1) = 1/e = 0.368\,, \quad P(D_m = 2) = 1/(2e) = 0.184\,,$$
$$P(D_m \geq 3) = 1 - P(D_m = 0) - P(D_m = 1) - P(D_m = 2) = 0.080\,.$$

Für unseren Prozess $\{X_t\}$ berechnen wir nun die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) \qquad \text{für } i, j \in S = \{0, 1, 2, 3\} :$$

$p_{00} = P(X_1 = 0|X_0 = 0) = P(D_1 \geq 3) = 0.080$ (Wegen $X_0 = 0$ werden 3 Kameras bestellt. Da $X_1 = 0$, müssen mindestens 3 Kameras in der Woche verlangt worden sein, d. h. $D_1 \geq 3$.)

$p_{01} = P(X_1 = 1|X_0 = 0) = P(D_1 = 2) = 0.184$ (Wegen $X_0 = 0$ werden 3 Kameras bestellt. Da $X_1 = 1$, müssen 2 Kameras in der Woche verlangt worden sein, d. h. $D_1 = 2$.)

$$
\begin{aligned}
p_{02} &= P(X_1 = 2|X_0 = 0) = P(D_1 = 1) &&= 0.368\\
p_{03} &= P(X_1 = 3|X_0 = 0) = P(D_1 = 0) &&= 0.368\\
p_{10} &= P(X_1 = 0|X_0 = 1) = P(D_1 \geq 1)\\
&\qquad = 1 - P(D_1 = 0) &&= 0.632
\end{aligned}
$$

(Wegen $X_0 = 1$ werden keine Kameras bestellt. Da $X_1 = 0$, muss mindestens 1 Kamera in der Woche verlangt worden sein, d. h. $D_1 \geq 1$.)

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= P(X_1 = 1|X_0 = 1) = P(D_1 = 0) &&= 0.368\\
p_{12} &= P(X_1 = 2|X_0 = 1) &&= 0 &&\text{(Unmögliches Ereignis)}\\
p_{13} &= P(X_1 = 3|X_0 = 1) &&= 0 &&\text{(Unmögliches Ereignis)}\\
p_{20} &= P(X_1 = 0|X_0 = 2) = P(D_1 \geq 2) &&= 0.264\\
p_{21} &= P(X_1 = 1|X_0 = 2) = P(D_1 = 1) &&= 0.368\\
p_{22} &= P(X_1 = 2|X_0 = 2) = P(D_1 = 0) &&= 0.368\\
p_{23} &= P(X_1 = 3|X_0 = 2) &&= 0 &&\text{(Unmögliches Ereignis)}\\
p_{30} &= P(X_1 = 0|X_0 = 3) = P(D_1 \geq 3) &&= 0.080\\
p_{31} &= P(X_1 = 1|X_0 = 3) = P(D_1 = 2) &&= 0.184\\
p_{32} &= P(X_1 = 2|X_0 = 3) = P(D_1 = 1) &&= 0.368\\
p_{33} &= P(X_1 = 3|X_0 = 3) = P(D_1 = 0) &&= 0.368
\end{aligned}
$$

Somit ergeben sich die Einschritt–Übergangsmatrix und der Übergangs- oder Transitionsgraphen mit $S = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$
\mathbf{P} = \mathbf{P^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{pmatrix}
$$