

## 9. Übung zur Vorlesung

# LINEARE OPTIMIERUNG

(Abgabe: spätestens Dienstag, 24. Juni 2008, vor der Vorlesung)

### 26. Aufgabe

(1+2+2+2 Punkte)

**Definition.** Gegeben seien ein Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $\text{rang}(A) = m$ , sowie eine Partition der Spaltenindexmenge  $\{1, \dots, n\}$  durch die Mengen  $B$  und  $N$ .

1.  $P^=(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ .
2. Für eine beliebige nichtleere Teilmenge  $T \subseteq \{1, \dots, n\}$  fassen wir die Menge von Spaltenvektoren  $\{A_{\cdot, j} \mid j \in T\}$  von  $A$  als Matrix auf und kürzen sie mit  $A_T$  ab. Analog schreiben wir  $x_T$  für den Vektor  $\text{vec}(\{x_t \mid t \in T\})$ .
3. Ist  $A_B$  regulär, so heißt  $A_B$  *Basismatrix* oder kurz *Basis* von  $A$ , und  $A_N$  heißt *Nichtbasismatrix* oder kurz *Nichtbasis* von  $A$ . Der Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_N = 0$  und  $x_B = A_B^{-1}b$  heißt *Basislösung von  $Ax = b$  zur Basis  $A_B$*  oder kurz *Basislösung*.
4. Ist  $A_B$  eine Basis, dann heißen die Variablen  $x_j, j \in B$ , *Basisvariable* und die Variablen  $x_j, j \in N$ , *Nichtbasisvariable*.
5. Ist  $A_B$  eine Basis, dann heißen  $A_B$  und die zugehörige Basislösung  $x$  *zulässig bezüglich  $P^=(A, b)$* , wenn  $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$  gilt.
6. Eine Basislösung  $x$  zur Basis  $A_B$  heißt *nichtentartet* (oder *nichtdegeneriert*), falls  $x_B = A_B^{-1}b > 0$ , andernfalls heißt sie *entartet* (oder *degeneriert*).

Betrachten Sie das Polyeder  $P(A, b)$ , gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Stellen Sie  $P(A, b)$  graphisch dar und bestimmen Sie alle Ecken.
- b) Formen Sie  $P(A, b)$  in ein Polyeder der Form  $P^=(\bar{A}, \bar{b})$  um.
- c) Bestimmen Sie alle regulären (3,3)-Untermatrizen von  $\bar{A}$ .
- d) Berechnen Sie alle Basislösungen und ordnen Sie diese den Ecken zu. Welche Ecken bzw. Basislösungen sind entartet, welche sind zulässig?

**27. Aufgabe****(3+3 Punkte)**

Sei  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder. Zeigen Sie:

- (a) Jede minimale nichtleere Seitenfläche  $F$  von  $P$  ist ein affiner Raum. Insbesondere existiert eine Zeilenindexmenge  $I$  von  $A$ , so daß  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_I x = b_I\}$  gilt<sup>1</sup>.
- (b) Alle minimalen nichtleeren Seitenflächen von  $P$  haben dieselbe Dimension und sind von der Form  $y + \text{lineal}(P)$  mit  $y \in P$ , d.h., sie sind parallel.

**28. Aufgabe****(2+2+2 Punkte)**

Gegeben sei ein Polytop  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ , wobei alle Zeilen von  $A$  nichtnull sind. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Das Polytop besitzt volle Dimension, d.h.  $\dim(P) = n$ .
- (ii) Es existiert ein Punkt  $x \in P$  mit der Eigenschaft  $Ax > b$ .
- (iii) Es gibt mindestens  $n+1$  Ecken von  $P$ , die nicht auf einer gemeinsamen Hyperebene liegen.

**29. Aufgabe****(3+4 Punkte)**

Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder, dann heißt  $P^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq 1 \text{ für alle } x \in P\}$  die **Polare** von  $P$ .

- a) Zeigen Sie:  $(P^*)^* = P \iff 0 \in P$ .
- b) Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein volldimensionales Polytop und sei  $0$  innerer Punkt von  $P$ . Beweisen Sie:

$$v \text{ Ecke von } P \iff v^T y \leq 1 \text{ Facette von } P^*$$

$$u \text{ Ecke von } P^* \iff u^T x \leq 1 \text{ Facette von } P$$

---

<sup>1</sup>**Achtung:** Der Unterschied zur Charakterisierung von beliebigen Seitenflächen ist hier  $x \in \mathbb{R}^n$  statt  $x \in P$ !