Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Gozel Judakova

01.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 3 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis 8. Mai, 23:59 Uhr

Intervallschachtelung Man lese Abschnitt 6.1.2 Intervallschachtelung und beantworte kurz die folgenden Fragen

1. Unter welchen Bedingungen konvergiert die Intervallschachtelung gegen eine Nullstelle?
2. Wir gehen aus vom Startintervall $I = [2, 8]$. Wieviele Schritte sind notwendig, um einen Fehler von 0.01 zu garantieren? (Unabhängig von der Funktion $f(x)$)
3. Man nenne ein Beispiel für ein Nullstellenproblem, wo die Intervallschachtelung nicht angewendet werden kann, obwohl die Funktion innerhalb eines Intervalls $I = [a, b]$ eine Nullstelle hat. (Es reicht eine kurze Beschreibung einer speziellen Situation, eine Skizze oder die Angabe einer Funktion)

Das Newton-Verfahren Man lese Abschnitt 6.1.3 Das Newton-Verfahren. Zentral ist hier Konvergenzsatz 6.7 und der zugehörige Beweis. Man schaue sich auch das Video zum Newton-Verfahren an:
`https://www.math.uni-magdeburg.de/~richter/videos/am2.html`
Man gebe kurze Antworten:

1. Was ist die Konstruktionsidee des Newton-Verfahrens?
2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Ausgehen vom Startwert x_0 gebe man die ersten beiden Iterierten x_1, x_2 des Newton-Verfahrens an.
3. Welche Bedingung muss für den Startwert gelten, damit das Newton-Verfahren konvergiert?
4. Was bedeutet quadratische Konvergenz? Was bedeutet lineare Konvergenz. Man gebe entweder eine eindeutige Formel an oder beschreibe den Unterschied.
5. An welcher Stelle wird die Bedingung $m := \min_{[a,b]} |f'(x)| > 0$ beim Nachweis der Konvergenz des Newton-Verfahrens zwingend benötigt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1: Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$f''(x) \leqslant 0, \quad f'(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h., die Funktion ist konkav und streng monoton steigend.

a) Man zeige, dass f in $\mathbb{R}$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Man zeige, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen diese Nullstelle konvergiert.

Hinweis: Der Satz aus dem Skript kann angewendet werden um quadratische Konvergenz zu zeigen, wenn die Iteration x_k nahe genug an der Nullstelle ist. Hier muss gezeigt werden, dass jeder Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ zu einer Iteration führt, die schließlich nahe genug an der Nullstelle liegt. Tipp: man Untersuche auf die Newton-Folge auf Monotonie und Beschränktheit.

Programmieraufgabe 3.2:

a) Man implementiere das Newton-Verfahren zum Auffinden einer Nullstelle $z \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man realisiere die folgende Steuerung zum Abbruch:

- Das Verfahren bricht ab, wenn das Residuum $|f(x_k)|$ kleiner als 10^{-14} ist.
- Das Verfahren bricht mit einer Fehlermeldung ab, sobald das Residuum zu stark gegenüber dem Startresiduum steigt, genauer gesagt im Fall $|f(x_k)| > 100 \cdot |f(x_0)|$, oder falls mehr als 20 Schritte benötigt werden.

Eine Vorlage findet sich in `template_03.py`. Man teste das Verfahren anhand der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x(3 - x^2)}{4}$$

und gebe Approximation x_k und Residuum $|f(x_k)|$ für die folgenden Startwerte aus

$$x_0 = 0.7, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1 - 10^{-8}, \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 1.2$$

b) Das *Sekanten-Verfahren* ist eine Variante des Newton-Verfahrens, bei dem die Ableitung $f'(x)$ durch eine Approximation der letzten beiden Iterationswerte genähert wird,

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

also, aufbauend auf zwei unterschiedlichen Startwerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Anhand der Funktion aus Aufgabe **3.2a)** vergleiche man die Konvergenz von Newton-Verfahren und Sekanten-Verfahren. Wieviele Schritte werden jeweils benötigt um ein Residuum 10^{-14} zu erreichen. Als Startwerte wähle man (für das Newton-Verfahren jeweils nur x_0)

$$(x_0, x_1) = (-2, -1), \quad (x_0, x_1) = (-0.999, 0.999), \quad (x_0, x_1) = (0.4, 3).$$

c) (1 Punkt) Man stelle den Konvergenzverlauf aus **b)** für beide Verfahren graphisch dar. Dabei wähle man auf der x-Achse die Anzahl der Schritte, auf der y-Achse logarithmisch das Residuum.

Abgabe der Übungen sowie der Kurzfragen bis Freitag nach Ausgabe (einschließlich) per Mail an `algomath@ovgu.de`.

Die Abgabe der Kurzfragen ist in festen 2er Gruppen möglich. Für die Übungsaufgaben eine Abgabe pro (5er-7er) Gruppe. Jede Gruppe hat eine wöchentliche Videokonferenz mit Gozel Judakova. Pro Woche wird die praktische Übungsaufgabe von einem/r anderen Teilnehmer/in der Gruppe vorgestellt.

Die Anforderungen an den Leistungserwerb sind erfüllt, wenn im Laufe des Semesters die Hälfte der Kurzfragen korrekt beantwortet werden und wenn mindestens einmal eine Präsentation der Programmierübung in den Videokonferenzen erfolgt ist. Teilnehmer/Innen, die in diesem Semester technische Probleme bei der Bearbeitungen mit den Progammierübungen habe, bitte ich um kurze Nachricht (thomas.richter@ovgu.de). Wir finden dann eine individuelle Lösung.