Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Gozel Judakova

29.05.2020

thomas.richter@ovgu.de
gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 7 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis zum 05. Juni 2020

Vertiefung: LR-Zerlegung In der letzten Woche stand die Konditionierung des Lösen von LGS im Mittelpunkt. Darüber hinaus wurde die Konstruktion der LR-Zerlegung besprochen, also eine multiplikative Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in eine linke untere Dreiecksmatrix L (mit Einsen auf der Diagonale) und eine rechte obere Dreiecksmatrix R.
Diese Woche geht es zunächst um den Existenzsatz zur LR-Zerlegung und um die Berechnung des Aufwands. Die LR-Zerlegung ist nicht billiger als die Gauss-Elimination, sondern erfordert genau die gleiche Anzahl von Operationen. Der Vorteil liegt in der praktischen Durchführung, sowie in der Möglichkeit, im Anschluss an die Zerlegung mehrere LGS mit unterschiedlichen rechten Seiten b schnell zu lösen.
Im Anschluss untersuchen wir noch praktische Spezialfälle, insbesondere die Anwendung auf positiv definite Matrizen (dieses werden wir auslassen) sowie auf Matrizen mit einer speziellen Struktur, sogenannte Bandmatrizen, bei denen sehr viele Matrixeinträge Null sind.

Die LR-Zerlegung Man lese ab Satz *7.27* (*LR-Zerlegung*) bis zum Ende von Abschnitt 7.3 auf Seite 144. Hier ist der Beweis zu Satz 7.27 der zentrale Inhalt. Man gebe kurze Antworten:

1. Unter welchen Umständen existiert die LR-Zerlegung einer Matrix A.
2. Können Sie einer Matrix ansehen, ob die LR-Zerlegung existiert?
3. Angenommen, die LR-Zerlegung einer 100×100 Matrix kann in 2.3 Sekunden erstellt werden. Wir lange würde es etwa bei einer 1000×1000 Matrix dauern?
4. Wie kann die LR-Zerlegung, d.h. L und R direkt anstelle der Matrix A gespeichert werden? Es haben doch L und R jeweils
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
Einträge, also zusammen $n^2 + n$. Die Matrix A kann aber nur n^2 verschiedene Zahlen speichern.

Die Cholesky-Zerlegung und positive definite Matrizen Diesen Abschnitt werden wir im wesentlichen überspringen. Ein Problem der LR-Zerlegung ist, dass wir es einer Matrix A schlecht ansehen können, ob die LR-Zerlegung durchführbar ist. Selbst wenn die Matrix A invertierbar ist, kann dennoch ein Null-Pivot-Element auftauchen. Postiv definite Matrizen erfüllen die Eigenschaft

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \quad \text{für alle Vektoren } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\langle x, y\rangle$ das Skalarprodukt ist

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Wenn die Matrix A zusätzliche symmetrisch ist, so stellt sich heraus, dass die LR-Zerlegung immer existiert und zwar sogar in einer speziellen Form

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T,$$

mit einer Dreiecksmatrix $\tilde{L}$. Wir schreiben $\tilde{L}$ statt L, da die Matrix $\tilde{L}$ nicht unbedingt Einsen auf der Diagonale hat. Diese Zerlegung existiert dann also immer (d.h. für jede symmetrisch positiv definite Matrix) und kann sehr effizient (in halber Zeit) durchgeführt werden. Positiv definite Matrizen spielen in vielen Anwendungen eine Rolle. Sie dürfen gerne Abschnitt *7.4 Die Cholesky-Zerlegung für positiv definite Matrizen* lesen, aufgrund des kürzeren Semesters wird dieser aber kein Bestandteil der Vorlesung sien.

Bandmatrizen Bandmatrizen sind Matrizen, bei denen von Null verschiedene Matrixeinträge nur nahe an der Diagonalen auftauchen, d.h. in *einem dünnen Band um die Diagonale*. Es zeigt sich, dass diese Struktur bei Durchführung der LR-Zerlegung erhalten bleibt. Man lese Abschnitt *7.5 Dünn besetzte Matrizen und Bandmatrizen* bis vor *7.5.1 Parallele LR-Zerlegung* und gebe kurze Antworten:

1. Was ist eine Bandmatrix mit Bandbreite 4?

2. Wie gross ist der Aufwand zur Durchführung der LR-Zerlegung einer Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Bandbreite $\sqrt{n}$? (Das ist ein wichtiger Spezialfall in der Anwendung).

3. In Beispiel 7.35 wird gezeigt, dass der Aufwand der LR-Zerlegung von der Sortierung der Matrix abhängt. Wir wollen aber ein LGS lösen. Warum kann man trotz Umsortieren der Zeilen und Spalten dennoch das gleiche LGS lösen?

Aufgabe 7.1:

Man beweise Satz *7.34* (*LR-Zerlegung einer Bandmatrix*). Also, es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit Bandbreite m. Die LR-Zerlegung $A = LR$ sei durchführbar. Man zeige, dass die Matrizen L und R wieder Bandmatrizen mit Bandbreite m sind und dass die Zerlegung mit dem Aufwand $\mathcal{O}(nm^2)$ durchführbar ist.

Programmieraufgabe 7.2:

In der Programmvorlage ist der Algorithmus zur LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vorgegeben. Die Zerlegung wird dabei in der Matrix A selbst gespeichert.

a) Man vervollständige die Methoden `vorwarts(...)` (bereits vorgegeben) und `rueckwaerts` $\hookrightarrow$ `(...)` zum Lösen der Teilprobleme mit L und R und teste die Methode zum Lösen der Gleichungssysteme bei der vorgegebenen Matrix bei $m = 2, 4, 8, 16, 32$.

b) Die Testmatrix ist eine Bandmatrix der Bandbreite $m = \sqrt{n}$. Man modifiziere die Methoden `lr(...)`, `vorwaerts(...)`, `rueckwaerts(...)` und messe jeweils für $m = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ (man achte darauf, dass $n = m^2$ gilt, die Matrizen sind also groß) die Zeit für die jeweiligen Funktionen vor und nach der Modifikation.