Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Gozel Judakova

08.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 4 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis 15. Mai, 23:59 Uhr

Varianten des Newton-Verfahrens Man lese Abschnitt *6.1.4 Varianten des Newton-Verfahrens*. Sie müssen hierbei nicht sehr genau sein, z.B. können Sie die Beweise zu allen Sätzen überspringen (dürfen die aber natürlich auch gerne durchgehen). Es geht hier um einige kleine Varianten des Newton-Verfahrens, die jeweils auf einer Approximation der Ableitung beruhen.
Man beantworte kurz die folgenden Fragen:

1. Es sei bekannt, dass die Funktion $f(x)$ eine dreifache Nullstelle hat. Wie sieht die optimale Newton-Iteration aus, die quadratisch gegen diese Nullstelle konvergiert?

Siehe Satz 6.16

$$x_{k+1} = x_k - 3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

2. Was ist der Defekt beim Lösen einer nichtlinearen Gleichung?

Suchen wir die Lösung von $f(x) = y$ und ist $\tilde{x}$ eine Approximation an die Nullstelle, so ist der Defekt

$$f(\tilde{x}) = |y - f(\tilde{x})|.$$

3. Was ist der Zusammenhang zwischen Defekt und Fehler?

Es gilt (Satz 6.14) mit der Nullstelle z

$$|\tilde{x} - z| \leqslant \frac{1}{\min |f'|} |d(\tilde{x})|.$$

Der Defekt eignet sich also als Fehlerabschätzung. Die Ableitung f' kann zwar oft nur geschätzt werden. Dies ist aber besser als nichts, denn die echte Nullstelle z ist sicher nicht bekannt. (Sonst müssten wir sie ja nicht approximieren).

4. Optional: Testen Sie das Python-Programm auf Seite 121 zum approximierten Newton-Verfahren. Wie ist die Schrittweise `eps` optimal zu wählen?

Konvergenzbegriffe Man lese Abschnitt *6.2 Konvergenzbegriffe*. Die verschiedenen Konvergenzbegriffe werden auch bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen Anwendung finden. Man beantworte die folgenden Fragen

1. Man schreibe die typischen Fehlerabschätzungen für ein Verfahren mit linearer Konvergenz und eines mit kubischer Konvergenz auf.

Linear mit Konvergenzrate $\rho < 1$

$$|x_{k+1} - z| \leqslant \rho |x_k - z|$$

Kubisch

$$|x_{k+1} - z| \leqslant c |x_k - z|^3$$

2. Was ist die Konvergenzordnung, was ist die Konvergenzrate?

Bei der allgemeinen Abschätzung

$$|x_{k+1} - z| \leqslant c |x_k - z|^p$$

ist $p > 0$ die Konvergenzordnugn. Im Fall $p = 1$ nennt man die Konstante c die Konvergenzrate. Dann liegt nur bei $c < 1$ Konvergenz vor.

3. Ein Gedankenspiel: Ähnlich dem Newton-Verfahren approximieren wir $f(x)$ lokal in x_k durch ein Taylor-Polynom, jedoch durch ein **quadratisches Polynom.** Der nächste Iterationsschritt x_{k+1} ist die Nullstelle dieses quadratischen Polynoms. Ein solches Verfahren hätte kubische Konvergenz. Wo ist der Haken? Warum ist dieses Verfahren nicht sinnvoll?

Das Hauptproblem ist, dass ein quadratisches Polynom entweder keine, eine oder zwei Nullstellen hat. Wie soll bei Mehrdeutigkeit ein vernünftiges Verfahren definiert werden? Und falls es keine Nullstelle gibt (oder z.B. nur komplexe), was macht man dann?

Darüber hinaus ist das Newton-Verfahren bereits so schnell, dass es wenig Bedarf für noch schnellere Methoden gibt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Wir betrachten die Iterationen

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}) \quad & x_0 = 2, \quad x_k = \frac{x_{k-1}+1}{2}, \\
(\mathrm{ii}) \quad & x_0 = 2, \quad x_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_{k-1}^3 - x_{k-1}^2 + x_{k-1}, \\
(\mathrm{iii}) \quad & x_0 = 2, \quad x_k = x_{k-1}\big(1 - \ln(x_{k-1})\big)
\end{aligned}
$$

Man zeige, dass alle drei Folgen für $k \to \infty$ gegen 1 kopnvergieren und bestimme jeweils die asymptotische Konvergenzordnung sowie, falls zutreffend, die lineare Konvergenzrate.

Zur Bestimmung von Ordnung und Rate wendet man jeweils Satz 6.23 an.

(i) Hier ist $g(x) = (x+1)/2$ also $g(1) = 1$ Fixpunkt und $g'(1) = 1/2 \neq 0$. Also lineare Konvergenz. Die Rate ist $\rho = 1/2$. Es liegt also wirklich Konvergenz vor. Da $g'(x) = 1/2$ für alle x liegt also immer konvergenz vor, wir haben also direkt gezeigt, dass (i) gegen 1 konvergiert.

(ii) Es ist

$$
g(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 1
$$

Hiermit sieht man $g(1) = 1$, also Fixpunkt sowie $g'(1) = g''(1) = 0$ und $g'''(1) = 2$. Falls die Iteration konvergiert, dann mit dritter Ordnung, also kubisch.
Weiter gilt für den Fehler mit dieser Darstellung

$$
\begin{aligned}
|x_k - 1| = & \Big|\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_{k-1}^3 - x_{k-1}^2 + x_{k-1} - 1\Big| \\
& = |g(x_{k-1}) - 1| = \frac{1}{3}|x_{k-1} - 1|^3 \frac{1}{3}|x_{k-1} - 1|^3 = \Big(\frac{1}{3}|x_{k-1} - 1|^2\Big)|x_{k-1} - 1|
\end{aligned}
$$

, was wieder kubische Konvergenz zeigt.
Es folgt Konvergenz gegen den Grenzwert, falls

$$
\frac{|x_{k-1} - 1|^2}{3} < 1
$$

Was für $x_0 = 2$ gilt. Also konvergiert die Folge.

(*iii*) Hier ist:

$$
g(x) = x(1 - \ln(x))
$$

mit

$$
g'(1) = 0, \quad g''(1) \neq 0
$$

Die Folge konvergiert also quadratisch.

Programmieraufgabe 4.2:

Abgabe der Übungen sowie der Kurzfragen bis Freitag nach Ausgabe (einschließlich) per Mail an `algomath@ovgu.de`.

Die Abgabe der Kurzfragen ist in festen 2er Gruppen möglich. Für die Übungsaufgaben eine Abgabe pro (5er-7er) Gruppe. Jede Gruppe hat eine wöchentliche Videokonferenz mit Gozel Judakova. Pro Woche wird die praktische Übungsaufgabe von einem/r anderen Teilnehmer/in der Gruppe vorgestellt.

Die Anforderungen an den Leistungserwerb sind erfüllt, wenn im Laufe des Semesters die Hälfte der Kurzfragen korrekt beantwortet werden und wenn mindestens einmal eine Präsentation der Programmierübung in den Videokonferenzen erfolgt ist. Teilnehmer/Innen, die in diesem Semester technische Probleme bei der Bearbeitungen mit den Progammierübungen habe, bitte ich um kurze Nachricht (thomas.richter@ovgu.de). Wir finden dann eine individuelle Lösung.