Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter 05.06.2020

Lösung zu: Übung Nr. 8 zur Algorithmische Mathematik I
Wintersemester 2019/2020

Abgabe bis zum 12. Juni 2020

Optimierung

1. Was bedeutet es, dass ein Punkt x ein zulässiger Punkt für eine Minimierungsaufgabe ist?

   Wir suchen das Minimum in einer vorgegebenen Menge, z.B.: "was ist das Minimum on $f(x) = \sin(x)$ in $[-3, 1]$". Dann bedeutet zulässig ganz einfach, dass $x \in [-3, 1]$ ist.

2. Was ist der Unterschied zwischen globalem und lokalem Minimum?

   Für ein lokales Minimum x gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass $f(x)$ das Minimum auf der ϵ-Umgebung von x ist. Ein globales Minimum minimiert f für alle zulässigen Punkte.

3. Was ist der Unterschied zwischen striktem Minimum und einfach Minimum?

   Bei einem striktem Minimum gilt $<$, im allgemeinen nur $\leqslant$.

4. Was bedeutet es, dass der Beweis zu Satz 8.2 *nicht konstruktiv* ist?

   Der Beweis konstruiert keine Lösung. Es wird z.B. ein Widerspruchsargument gewählt: *Angenommen, es existiere eine Divergente Folge*. Dies wird verneint und hieraus wird geschlossen, dass die Funktion beschränkt ist. Dieser Schluss ist zwar korrekt, sagt aber z.B. nichts darüber, wo das Minimum liegt. Der Beweis hilft nicht, das Minimum zu konstruieren, noch zu identifizieren, wo das Minimum angenommen wird.

Optimalitätskriterien

1. Was ist ein Sattelpunkt?

Es ist ein stationärer Punkt, d.h. $f'(x) = 0$, der jedoch weder Minimum noch Maximum ist. Ein typisches Beispiel im $\mathbb{R}$ ist $f(x) = x$. In höheren Dimensionen ist z.B. $f(x, y) = x^2 - y^2$ ein Beispiel und dies zeigt eine typische Struktur: $(0, 0)$ ist Minimum in Bezug auf x aber Maximum in bezug auf y.

2. Was ist der Unterschied zwischen einer notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingung?

Jedes Minimum (welches die entsprechenden Regularitätsvoraussetzungen erfüllt) muss die notwendigen Bedingungen erfüllen. Es gibt jedoch auch Minima, die diese notwendigen Bedingungen nicht erfüllen. Diese erfüllen jedoch auch nicht die entsprechenden Regularitätsbedingungen, z.B. $f(x) = |x|$ hat Minimum bei $x = 0$, aber ist dort nicht diffbar. Darüber hinaus gibt es Punkte, die die notwendigen Bedingungen erfüllen, aber keine Minima sind, z.B. $x = 0$ bei $f(x) = x^3$.

Ein Punkt der die hinreichende Bedingung erfüllt ist sicher ein Minimum. Allerdings gibt es Punkte, welche Minima sind, die Regularitätsvoraussetzungen für die hinreichende Bedingung erfüllen, aber dennoch die hinreichende Bedingung selbst nicht erfüllen, z.B. $f(x) = x^4$. D.h., hinreichend ist nicht notwendig.

3. Wie verläuft jede Sekante einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Immer oberhalb der Funktion.

4. Welche Art von Extremstelle hat $f(x) = x^3 + x^2$ im Punkt $x = 0$?

Hier ist ein stationärer Punkt

$$f'(x) = 3x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

mit

$$f''(x) = 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad f''(0) > 0,$$

d.h. ein Minimum.