Dr. Carmen Gräßle
MPI für Dynamik Komplexer Technischer Systeme Magdeburg
graessle@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr. Thomas Richter
OVGU - Institut für Analysis und Numerik
thomas.richter@ovgu.de

11.05. bis 18.05.2020

Exercises "Numerical Methods in Fluid Mechanics"
Summer 2020 - Blatt 3

Thema der Woche ist die Existenz von Lösungen der Stokes Gleichung. Der Nachweis der Existenz einer Geschwindigkeit ist sehr einfach: wir schränken das Problem auf den Raum der schwach divergenzfreien H^1-Funktionen ein, zeigen dass dieser Raum ein Hilbertraum ist (die Abgeschlossenheit ist nicht ganz klar, hierfür Lemma 2.5) und betrachten dann den Vektor-Laplace in diesem Raum

$$v \in V_0 := \{\varphi \in H_0^1(\Omega)^d \mid \operatorname{div} v = 0\} \quad (\nabla v, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Hier folgt alles mit dem Riesz'schen Darstellungssatz oder mit Lax-Milgram. Es bleibt die Existenz des Drucks. Dieses Problem ist sehr schwer, denn die Gleichung

$$\nabla p = \Delta v - f$$

ist nicht elliptisch. In der schwachen Formulierung ist der Druck nur in L^2 gegeben. Er scheint aber etwas mehr Regularität zu benötigen.

Wir halten als notwendige Bedingung für die Existenz die *inf-sup Bedingung*. Diese Bedingung ist im Paar $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ erfüllt und somit existiert eine eindeutige Lösung. Der Nachweis der inf-sup Bedingung ist allerdings alles andere als einfach. Im Skript ist der vollständige Beweis für eine vereinfachte Situation (auf Vierecken). Viele Bücher sind hier auch nicht vollständig. (Um genau zu sein, habe ich einen allgemeinen Beweis noch nicht gesehen).

Hierzu folgt ein Video unter `https://www.math.uni-magdeburg.de/~richter/videos/cfd.html`

Diese Woche ist recht umfangreich, die kommende wird dafür weit kürzer.

Das Stokes Geschwindigkeitsproblem Man lese Kapitel 2 bis einschließlich Abschnitt *2.1.1 Existence and uniqueness of the velocity* und beantworte die folgenden Fragen

1. Was sind sinnvolle Funktionenräume für Druck und Geschwindigkeit in der schwachen Formulierung der Stokes- und Navier-Stokes Gleichungen.

2. Unter welchen Bedingungen muss an den Druck eine Zusatzbedingung gestellt werden?

3. Warum sagt man, dass die Stokes Gleichungen ein Sattelpunktproblem sind?

4. Es wurde $\|divv\| \le c\|\nabla v\|$ gezeigt. Gilt auch $\|\nabla v\| \le c\|divv\|$?

5. Was ist das (relativ) einache Argument, mit dem schnell die Existenz einer eindeutigen Geschwindigkeit folgt?

Spektraltheorie Man lese Abschnitt *2.1.2 Spectral theory*. Dieser wird später in der nächsten Woche für die Behandlung der nichtlinearen Navier-Stokes Gleichungen benötigt. Man beantworte die folgenden Fragen

1. Warum hat der Stokes-Operator $-\Delta v$ nur positive reelle Eigenwerte?
2. Die Bedeutung von $\mathcal{J}_0$ (2.5) ist merkwürdig. In welcher Hinsicht kann für eine L^2-Funktion etwas für die Divergenz, also eine Ableitung gefordert werden? In dem Zusammenhang: warum hat dieser Raum eine Bedingung auf dem Rand?
3. Warum wird der Stokes-Operator als $S = -P_0\Delta$ und nicht einfach als $S = -\Delta$ definiert? Warum also die zusätzliche Projektion?
4. Warum ist der inverse Stokes operator $S^{-1} : J_0 \to J_0$ kompakt?
5. Ist der Stokes Operator $S : J_0 \to J_0$ selbst auch beschränkt?

Das Druckproblem Jetzt kommt der wirklich schwere Teil. Man lese zunächst Abschnitt *2.1.3 Existence and uniqueness of the pressure* bis Einschließlich *Theorem 2.16 Solution to the Stokes equations* und beantworte die folgenden Fragen:

1. Warum kommen wir beim Druck mit Lax-Milgram nicht weiter?
2. Was ist das Bild des schwachen Gradienten auf L^2?
3. Was ist der Annihilator eines Raumes?
4. Nach Lesen des Beweises von Theorem 2.16 fasse man noch einmal die wesentlichen Schritte zum Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit von Geschwindigkeit und Druck zusammen.
5. Was ist an der folgenden Argumentation falsch: jede Funktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ist auch in $L^2(\Omega)$, also $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, sogar

   $$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

   Der $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum und wegen dem Riesz'schen Darstellungssatz isometrisch isomorph zu seinem Dualraum, also $L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^*$. Für ein Funktional $l \in L^2(\Omega)^*$ ist

   $$|l(\varphi)| < c\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

   und natürlich gilt auch

   $$|l(\varphi)| < c\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

   D.h. l ist auch Funktional auf $H_0^1(\Omega)$, also gilt

   $$L^2(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega).$$

   Der $H_0^1(\Omega)$ ist aber auch ein Hilbertraum, somit isometrisch isomorph zu seinem Dualraum $H^{-1}(\Omega)$. Insgesamt gilt also:

   $$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong L^2(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega) \cong H_0^1(\Omega).$$

   Das kann aber doch nicht stimmen, da es ja ganz klar Funktionen $\varphi \in L^2(\Omega)$ gibt, die nicht in $H_0^1(\Omega)$ liegen.

Die inf-sup bedingung Man Lese den Abschnitt *2.1.4 The inf-sup condition* und auch, etwas später *Lemma 2.31 (Regularity of the Stokes solution)*. Theorem 2.28 ist zentral. Hier wird aber nur die Äquivalenz verschiedener Bedingungen gezeigt. In manchen Büchern wird dieses Theorem als "Beweis" für die Existenz des Drucks herangeführt. Es fehlt aber der wesentliche Schritt, der Beweises einer dieser Bedingungen. Man beantworte die folgenden Fragen

1. Was weiss man (wissen Sie :-) über die inf-sup Konstante?
2. Wie sieht die inf-sup Bedingung aus?
3. Folgern sie mit der inf-sup Bedingung die Eindeutigkeit des Drucks.

Wer will... darf gerne den Übersprungenen Teil lesen (nach Theorem 2.16 bis zu Abschnitt 2.1.4) und auch hierzu am kommenden Montag Fragen stellen.

Abgabe bis nächsten Freitag (einschließlich).