Dr. Carmen Gräßle 15.04.2020
MPI für Dynamik Komplexer Technischer Systeme Magdeburg
graessle@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr. Thomas Richter
OVGU - Institut für Analysis und Numerik
thomas.richter@ovgu.de

Exercises "Numerical Methods in Fluid Mechanics"
Summer 2020 - 1

Kinematik

1. Ein Kontinuum ist eine offene Menge, in der Materie als lückenlos und durch glatte (z.B. stetig oder Diffbar) Eigenchaften beschrieben ist. Die Beschreibung eignet sich, wenn die Blickweise makroskopisch ist, nicht aber, wenn das Verhalten auf sehr kleiner Skalar beschrieben werden soll.
2. Das ist die Euler'sche Sicht.
3. Hier wäre ich auf einem Boot und würde mich mit dem Schiff bewegen. D.h. der Betrachter bewegt sich immer mit.
4. Der Deformationsgradient gibt die Änderung von relativen Positionen unter Deformation an. Er ist eine Näherung erster Ordnung.
5. Der Tensor C gibt die relative quadrierte Längenänderung zwischen 2 Bezugspunkte an und ist eine Näherung 2ter Ordnung.

Erhaltungsgleichungen

1. Für alle skalare Größen die nicht wechselwirken ist die Erhaltungsgleichung gleich (d.h. wie Masseerhaltung). Es ergibt sich durch das Reynold'sche Transporttheorem
$$\partial_t s(x,t) + div(s(x,t)v(x,t)) = 0.$$
2. Es sei V das Gebiet zum Zeitpunkt $t = 0$. Dann ist
$$m(0) = \int_V \hat{\rho}^0(\hat{x})d\hat{x} = \int_V \rho(x,0)dx = \int_{V(t)} \rho(x,t)dx = m(t),$$
wobei wir mit $\hat{\rho}^0(\hat{x})$ die Referenzdichte meinen. Diese stimmt mit der Dichte zum Zeitpunkt $t = 0$ überein.

   Zurücktransformation vom Zeitpunkt t auf V gibt
$$\int_V \hat{\rho}^0(\hat{x})d\hat{x} = \int_{V(t)} \rho(x,t)dx \int_V \rho(x,0)dx = \int_{V(t)} \rho(x,t)dx = \int_V J\hat{\rho}(\hat{x},t)\,\mathrm{d}x,$$
mit dem Deformationsgradienten $J = \det(F)$. Das Kontinuum V kann beliebig gewählt werden. Also gilt punktweise
$$\rho(\hat{x},t) = J^{-1}\hat{\rho}^0(\hat{x}).$$

   Das ist die Form der Masseerhaltung, die in der Strukturmechanik betrachtet wird. Sie stimmt auch mit der Anschauung überein. Wir das Volumen expandiert, so ist $|V(t)| > |V|$ also muss $J > 0$ sein und somit die Dichte $\hat{\rho}(\hat{x},t) < \hat{\rho}^0(\hat{x})$ nimmt ab.