Dr. Carmen Gräßle
MPI für Dynamik Komplexer Technischer Systeme Magdeburg
graessle@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr. Thomas Richter
OVGU - Institut für Analysis und Numerik
thomas.richter@ovgu.de

15.04.2020

**Exercises "Numerical Methods in Fluid Mechanics"**
**Summer 2020 - 1**

---

1. An infinite long river

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 < y < 1\}$$

is in motion. The deformation field $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ for a particle $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y})$ is given as

$$\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \begin{pmatrix} \hat{y}(1-\hat{y}) \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

**a)** Show that the velocity in Lagrangian coordinates and Eulerian coordinates is given by

$$\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \begin{pmatrix} \hat{y}(1-\hat{y}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} y(1-y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Why is there no difference between both viewpoints here?

---

Einfach nachrechnen. Und generell gilt immer $\hat{v}(\hat{x}, t) = v(x, t)$. Bei der Transformation zwischen den Koordinatensystemen wird nur die Definitionsmenge transformiert, nicht das Bild.

**b)** Assume that two ducks are floating in the river with initial position $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1(0) = (0, 0.2)$ and $\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2(0) = (0, 0.2 + \delta)$ for a small $\delta > 0$. Compute the Deformation gradient as seen from duck $\mathbf{x}_1$. What does it say about the relation of the two ducks?

---

Das Deformationsfeld ergibt sich als

$$\hat{u}(\hat{x}, t) = x(t) - x(0) = \begin{pmatrix} \hat{y}(1-\hat{y})t \\ 0 \end{pmatrix},$$

und also

$$F = I + \hat{\nabla}\hat{u} = \begin{pmatrix} 1 & (1-2y)t \\ 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Für die erste Ente

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6t \\ 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Der Abstand zwischen den Enten ist (einfach y-Werte Einsetzen)

$$d(t) = \begin{pmatrix} (0.6\delta - \delta^2)t \\ \delta \end{pmatrix}$$

In Referenzkoordinaten, also zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

Mit dem Deformationsgradienten

$$F_1(t)\hat{d} = \begin{pmatrix} 0.6\delta t \\ \delta \end{pmatrix},$$

was in erster Näherung mit $d(t)$ übereinstimmt. Die obere Ente ist etwas schneller, $F$ beschreibt daher hier eine Scherung.

**c)** Compute the strain rate tensor, again for duck $\mathbf{x}_1$. What does it say about the relation of the two ducks?

---

Es gilt

$$\hat{\nabla}\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 & (1-2y)t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & (1-2y)t \\ (1-2y)t & 0 \end{pmatrix}$$

Für die erste Ente

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0.3t \\ 0.3t & 0 \end{pmatrix}.$$

Bedeutung?

2. Proof the following (simpler) one dimensional equivalent to Reynolds transport theorem. Do an elementary proof and do to transfer it to the general case:
*Let $I = (a(t), b(t))$ be an interval given by two functions $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ with $a(t) < b(t)$. It holds*
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(v(x,t)f(x,t)\big)\,dx,$$
*where $v(x,t)$ describes the velocity of the interval motion.*
**Hint:** One possible way to proof this result is a transformation of $(a(t), b(t))$ to $(0,1)$ via $x(\hat{x}, t) = a(t) + \hat{x}(b(t) - a(t))$. This deformation function belongs to the velocity $\hat{v}(\hat{x}, t) = a'(t) + \hat{x}(b'(t) - a'(t))$.

---

(Etwas anders als geplant und im Hinweis angegeben). Sei $F(x,t)$ die Stammfunktion (in Bezug auf $x$), d.h.
$$F(x,t) = \int_{x_0}^{x} f(x,t)dx$$
Dann
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx &= \frac{\partial}{\partial t}\big(F(b(t),t) - F(a(t),t)\big)\\
&= \partial_t\big(F(b(t),t) - F(a(t),t)\big) + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)\\
&= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)
\end{aligned}$$
$b'(t)$ und $a'(t)$ geben die Geschwindigkeit an, mit der sich der Rand bewegt. Es sei $v(x,t)$ eine beliebige (stetig differenzierbare) Erweiterung dieser Randwerte, also $v(a(t),t) = a'(t)$ und $v(b(t),t) = b'(t)$ ins Innere, z.B. einfach linear. Dann ist
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x,t)dx + f(b(t),t)v(b(t),t) - f(a(t),t)v(a(t),t)$$
was ich schreiben lässt als
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x,t)dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_x(f(x,t)v(x,t))dx.$$

**Remark** You are not required to hand in this problem set. But, if returned (per mail) until April 24, I will correct the answers.