Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

17.04.2020

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 1 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Aufgabe 1.1

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Man berechne die QR-Zerlegung der Matrix. Zur Orthogonalisierung verwende man das Gram-Schmidt Verfahren. Man mache den Test auf Orthogonalität der Matrix Q.

b) Man nutze die QR-Zerlegung zum Lösen des LGS.

Programmieraufgabe 1.2

a) Man erstelle eine Python-Funktion zur orthonormalisierung einer gegebenen liste von Vektoren mit dem Gram-Schmidt Verfahren. Hierzu ist dir Vorlage `template_01.py` vorgegeben.
In dieser Vorlage sind auch zwei Testlisten von Vektoren angegeben. Man gebe jeweils das Ergebnis aus.
b) Man schreibe eine Funktion zum Test auf Orthogonalität. Bei einer Umsetzung auf dem Computer können wir nicht davon ausgehen, dass Orthonormalität exakt erfüllt ist. Wir definieren daher als Maß für die paarweise Orthogonalität von n Vektoren $x_1, \dots, x_n$ die Funktion

$$O(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, x_j \rangle_2,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das Euklidische Skalarprodukt ist. Als Maß für die Normierung definieren wir

$$N(x_1, \dots, x_n) := n - \sum_{i=1}^{n} |x_i|_2^2,$$

wobei $|\cdot|_2$ die Euklidische Norm ist.
Man gebe beide Kenngrößen für die beschriebenen Testfälle aus.

c) (**Zusatz**) Plotten Sie die Kenngrößen für Normierung und Orthogonalität über die Anzahl der Größen $n \in \mathbb{N}$ aus Testfall (III) (siehe `template_01.py`). Warum scheint die Normierung sehr stabil zu sein?

Abgabe per Mail (**eine Abgabe pro 5er Gruppe**) an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de).
Abgabe bis zum jeweils folgenden Freitag.