Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

01.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 3 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Abgabe bis 8. Mai, 23:59

Thema der nächsten 2 Wochen sind Methoden zur Berechnung von Eigenwerten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zunächst geht es um die generelle Einordnung des Problems und seine Konditionierung. Im Anschluss untersuchen wir Methoden zur Approximation von Eigenwerten. Zunächst handelt es sich um Verfahren, die einzelne Eigenwerte berechnen, im Anschluss betrachten wir Zerlegungsmethoden, mit denen alle Eigenwerte einer Matrix gleichzeitig berechnet werden können.

Das Eigenwertproblem Man lese Kapitel 5, *Berechnung von Eigenwerten* bis einschließlich Abschnitt *5.2 Direkte Methode*. Satz 5.9 und sein Beweis ist zentral. Man beantworte kurz die folgenden Fragen:

1. Was ist der Rayleigh-Quotient?
2. Wovon hängt die Konditionierung des Eigenwertproblems ab?
3. Man gebe mit den Gerschgorin-Kreisen eine möglichst scharfe Abschätzung für die Eigenwerte der folgenden Matrix an
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
4. Warum ist es nicht sinnvoll, Eigenwerte numerisch über das charakteristische Polynom zu berechnen, obwohl wir z.B. mit dem Newton-Verfahren eine sehr effiziente Methode zur Approximation einer Nullstelle kennen?

Iterative Verfahren Man lese Abschnitt *5.3 Iterative Verfahren*. Zentrag ist Satz 5.11 über die Potenzmethode. Die Inverse Iteration ist dann nur noch eine Folgerung. Man beantworte die folgenden Fragen

1. Welche Eigenwerte können mit der Potenzmethode, welche mit der inversen Iteration (ohne Shift) berechnet werden?
2. Warum ist es schlecht, wenn der Startvektor bei der Potenzmethode ein Eigenvektor ist?

3. Was bedeutet *... mit nichttrivialer Komponente in Bezug auf* w_n in Satz 5.11?
4. Wovon hängt die Konvergenzrate beider Verfahren ab?
5. Was ist der wesentliche Aufwand bei der Durchführung der inversen Iteration?

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten

$$|\lambda_1| \leqslant \cdot \leqslant |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|.$$

Man zeige, dass die Potenzmethode bei Verwendung des Rayleigh-Quotienten (vergleiche Bemerkung 5.12) quadratisch konvergiert.
Hierzu ist eine Modifikation der Abschätzung im Beweis zu Satz 5.11 notwendig.

Programmieraufgabe 3.2

a) Man implementiere die Potenzmethode. Dabei breche man die Iteration ab, wenn sich der approximierte Wert um weniger als 10^{-6} ändert, oder wenn 500 Schritte durchgeführt wurden.
Für die vorgegebenen Testmatrizen gebe man die Anzahl der benötigten Schritte und den gefundenen Eigenwert an.

Hinweis: Der Startvektor kann zufällig gewählt werden. Dies ist in der Vorlage beschrieben.

b) Man vergleiche die Konvergenz des Verfahrens bei Verwendung der Approximation

$$\lambda_n = \frac{\tilde{x}_k^{(i)}}{x_k^{(i-1)}}$$

sowie bei Verwendung des Rayleigh-Quotienten

$$\lambda_n = \frac{(Ax^{(i-1)}, x^{(i-1)})_2}{(x^{(i-1)}, x^{(i-1)})_2}.$$

Geben Sie für die Testmatrizen bei beiden Methoden die Anzahl der benötigten Schritte aus. Führen Sie jeweils mehrere Tests durch und geben Sie einen Durchschnittswert an. Die Ergebnisse variieren, da der Startvektor zufällig gewählt wird.
Was beobachten Sie im Fall des Rayleigh-Quotienten bei Anwendung auf eine nichtsymmetrische Matrix?

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.