Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

08.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 4 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Abgabe bis 15. Mai, 23:59

Zerlegungsmethoden zur Eigenwertbestimmung Man lese Abschnitt *5.4 Zerlegungsverfahren...* im Buch, zunächst bis einschließlich *Beispiel 5.20 Cholesky-Verfahren*. In diesem Abschnitt ist Hilfsatz 5.17 wesentlich für den späteren Beweis von Satz 5.19 (Konvergenz der Cholesky-Methode). Der Beweis von Satz 5.17 (insbesondere (ii)) ist weder besonders schön und es ist sinnvoller, den Beweis zu Satz 5.19 näher zu studieren. Man gebe kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

1. Was ist der grundsätzliche Vorteil der Cholesky-Iteration im Vergleich zur Potenzmethode oder zur inversen Iteration?
2. Man gebe die Iterationsvorschrift der Cholesky-Iteration an.
3. Unter welchen Bedingungen an die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert das Cholesky-Verfahren?
4. Was ist der Aufwand pro Iteration für das Cholesky-Verfahren (in Bezug auf die Matrixgröße n)?

Die QR-Methode Man lese bis zum Ende des Abschnittes und gebe kurze Antworten:

1. Was ist der Vorteil der QR-Iteration gegenüber der Cholesky-Methode?
2. Was bedeutet "QR-Iteration mit Shift"?
3. Was ist der Aufwand für einen Schritt der QR-Methode, wenn die QR-Zerlegung mit Householder-Transformationen berechnet wird?

Reduktionsmethoden Man lese (sehr grob) Abschnitt *5.3 Reduktionsmethoden*. Hier geht es um eine Transformation der Matrix A auf eine Gestalt, bei der sich nachfolgend die Eigenwerte einfacher bestimmen lassen. Die Transformation soll dabei eine Ähnlichkeitstransformation sein, also

$$A \to \tilde{A} := S^{-1}SAS$$

damit A und $\tilde{A}$ die gleichen Eigenwerte haben. Optimal wäre eine Transformation auf Dreiecksgestalt oder Diagonalgestalt, dann könnten wir die Eigenwerte ablesen. Dies gelingt im allgemeinen jedoch nicht. Stattdessen wird die Hessenberg-Form eingeführt: eine Dreiecksmatrix mit einer zusätzlichen Zeile neben der Diagonalen. Es zeigt sich, dass die Hessenberg-Form mit Hilfe von Householder-Transformationen erzeugt werden kann. Im Anschluss kann die QR-Methode sehr effizient zur Berechnung der Eigenwerte durchgeführt werden. Man gebe kurz Antworten

1. Man skizziere die Hessenberg-Form einer Matrix.

2. Was ist der Aufwand zur Berechnung der QR-Zerlegung einer $n \times n$ Hessenberg Matrix?

3. Was ist der grundlegende Unterschied bei der Konstruktion der Spiegelungsvektoren bei der Erstellung der QR-Zerlegung und der Erstellung der Hessenberg-Form?

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1

Im Skript wird in Satz 5.23 die QR-Iteration mit Shift vorgestellt. Man zeige, dass auch die Cholesky-Iteration mit Shift eine Folge von ähnlichen Matrizen erzeugt. D.h. Mit $A^{(0)} := A$ und $\mu \in \mathbb{R}$ iteriere man für $l = 1, 2,$

1. Erstelle die Cholesky-Zerlegung
$$L^{(l)}[L^{(l)}]^T := A^{(l-1)} - \mu I$$
2. Setze
$$A^{(l)} := [L^{(l)}]^T L^{(l)} + \mu I$$

Programmieraufgabe 4.2

a) Man implementiere die Cholesky-Zerlegung und verwende hierfür das direkte Verfahren, Algorithmus 3.5 im Buch. Für die angegebenen Test-Instanzen teste man das Verfahren. Die korrekte Lösung ist in `template_04.py` vorgegeben. Man darf ausnutzen, dass alle Matrizen tridiagonal sind, d.h. $A_{ij} = 0$ für $|i - j| > 2$.

b) Man implementiere die Cholesky-Iteration zur Approximation aller Eigenwerte der Matrix. Man breche die Iteration ab, wenn die maximale Abweichung der Diagonalelemente zweier Iterationen kleiner als 10^{-3} ist, d.h. falls

$$\max_{l=1,\dots,n} |A_{ll}^{(k+1)} - A_{ll}^{(k)}| < 10^{-3}$$

Für $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ teste man durch Zeitmessung den Gesamtaufwand zum Erreichen der Toleranz. Mit welcher Ordnung (in n) wächst der Aufwand?

c) (**Zusatz**) Man versuche eine effiziente Implementierung von Cholesky-Zerlegung und Cholesky-Iteration und nutze aus, dass nur Tridiagonalmatrizen auftauchen, also Bandmatrizen mit Bandbreite 1. Wie wächst nun der Aufwand in Bezug auf n?

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.