Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

22.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 6 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Abgabe bis 29. Mai, 23:59

Approximation & Interpolation In den folgenden Abschnitten geht es um die Approximation von Funktionen. Im wesentlichen wollen wir dabei allgemeine Funktionen in möglichst einfacher Darstellung gut beschreiben. Wir stellen uns z.B. die Frage: wie können wir eine Funktion durch ein Polynom oder eine trigonometrische Funktion annähern. In der Analysis gibt es mit dem Weierstraßschen Approximationssatz ein sehr mächtiges Resultat: ist f auf einem abgeschlossenen Intervall stetig, so finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom mit p mit der Eigenschaft $\max |f - p| < \epsilon$. Dieser Satz sagt jedoch nichts zur Realisierung einer solchen Approximation.
Die Taylor-Entwicklung beschreibt einen konstruktiven Weg zur Approximation von Funktionen. Von ihr wissen wir jedoch, dass sie nicht in der Lage ist stets eine beliebig gute Approximation zu finden. Die Stetigkeit oder Differenzierbarkeit reicht aber noch nicht für die Konvergenz der Taylor-Reihe.
Wir werde zunächst das Interpolationsproblem besprechen. Interpolationen sind eine spezielle Form der Approximation. Hier folgt die Näherung durch die Vorgabe von ausgewählten Punkten. Die Interpolation selbst hat wichtige Anwendungen z.B. bei der Approximation von Differentialgleichungen. Wir werden sie aber als Hilfsmittel zur numerischen Differentiation oder zur numerischen Integration verwenden. Anschließend folgt noch die Behandlung von verschiedenen allgemeinen Approximationen.

Polynominterpolation Man lese Abschnitt *8. Interpolation und Approximation* zunächst bis einschließlich Abschnitt *8.1.1 Lagrangesche Darstellung* und gebe kurze Antworten auf die folgende Fragen

1. Was unterscheidet die Interpolation von der Approximation?
2. Warum ist es nicht sinnvoll die Koffizienten der Interpolation durch Lösen eines LGS zu bestimmen?
3. Wie siehen die Lagrange Basispolynome des $P_n = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ aus?
4. Warum kann die Lagrangesche Interpolationsaufgabe im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar sein, wenn zu n Stützstellen $n + 1$ Werte vorgegeben werden?

5. Wieviele Nullstellen kann die erste Ableitung eines Polynoms vom Grad 4 höchstens haben?

6. Angenommen zu den Stützstellen x_0, x_1, x_2 seien $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ die drei Basispolynome. Wie sieht dann die Interpolation zur Funktion $f(x) = \exp(x)$ aus?

Newtonsche Darstellung Wir überspringen Abschnitt *8.1.2 Newtonsche Darstellung*. Diese Darstellung hat den (theoretischen) Vorteil, dass die Basis nicht komplett neu bestimmt werden muss, wenn neue Stützstellen hinzugefügt werden. Darüber hinaus basieren viele Beweise auf der Newton'schen Darstellung der Interpolation. Die Newtonsche Darstellung wird meist mit Hilfe der *dividierten Differenzen* (*Bem. 8.9*) umgesetzt. Diese erlauben eine algorithmisch sehr einfache Realisierung (die jedoch wenig zum Verständnis beiträgt). Aufgrund der reduzierten Zeit in diesem Semester werden wir diese Aspekte überspringen.

Interpolation von Funktionen Angenommen wir interpolieren die Funktion $f(x) = \exp(x)$ mit Hilfe einer linearen Funktion in den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. So ergibt sich das interpolierende Polynom $p(x_0) = f(x_0)$ und $p(x_1) = f(x_1)$

$$p(x) = x.$$

Wir stellen uns nun die Frage nach der Approximationsgüte, d.h. nach dem Fehler $|f(x) - p(x)|$. In den Stützstellen ist der Fehler natürlich Null. Aber wie können wir den Fehler zwischen den Stützstellen abschätzen? Der Name *Interpolation* kommt genau daher: üblicherweise interpolieren wir in einigen diskreten Punkten $x_0, \dots, x_n$ und verwenden das Interpolationspolynom als vereinfachte Darstellung im gesamten Intervall $[x_0, x_n]$, welches durch die Stütztstellen aufgespannt wird. Betrachten wir die Interpolierende $p(x)$ auch als Näherung jennseits dieser Stützstellen, d.h. in $(-\infty, x_0)$ oder (x_n, ∞) so redet man von der *Extrapolation*, die wir später behandeln werden.
Abschätzungen für den Interpolationsfehler beruhen hauptsächlich auf der Taylor-Entwicklung. Man lese Abschnitt *8.1.3 Interpolation von Funktionen und Fehlerabschätzungen* bis einschließlich Satz 8.11 und seinem Beweis und gebe kurze Antworten

1. Wie interpolieren die Funktion $f(x) = \exp(x)$ mit einem quadratischen Polynom in den Punkten $0, 0.5, 1$. Wie sieht die Fehlerabschätzung im Intervall $[0, 1]$ aus?

2. Wir bleiben bei der Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ und der Interpolationsabschätzung aus Satz 8.11. Angenommen wir betrachten n gleichmäßig verteilte Stützstellen $x_i = i/n$. Konvergiert das Interpolationspolynom für $n \to \infty$ auf $[0, 1]$ gegen die Exponentialfunktion?

Probleme der Interpolation Wir überspringen die Abhandlungen zum integralen Restglied, die auf der Newtonschen Darstellung beruhen. Man lese nun weiter ab *Beispiel 8.14* bis Ende des Abschnittes, d.h. bis einschließlich *8.1.4 Hermite Interpolation*.

1. Können wir allgemein von Konvergenz des Interpolationspolynoms gegen die zu interpolierende Funktion ausgehen?

2. Ist die Interpolation stabil? D.h.: bleibt der Einfluss von kleinen Fehlern ϵ_i bei Vorgabe der Interpolation $p(x_i) = f(x_i) + \epsilon_i$ global beschränkt?

3. Was meint man mit *Hermite-Interpolation?*

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ und die zugehörigen Lagrangeschen Polynome

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Man zeige die folgenden Eigenschaften der Lagrange-Polynome

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&\text{ii)} && \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i^{(n)}(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\
&\text{iii)} && \sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} L_i^{(n)}(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i.
\end{aligned}$$

Hinweis: wir werden diese Eigenschaften später im Zusammenhang mit der Extrapolation verwenden. Der Nachweis ist nicht schwer, wenn man es richtig angeht: Man sollte nicht versuchen, die Zusammenhänge direkt nachzurechnen. Stattdessen interpretiere man die Summen als spezielle Interpolationspolynome.

Programmieraufgabe 6.2

Die Programmieraufgabe bezieht sich noch auf das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^3$. Wir suchen die vierten komplexen Einheitswurzeln, d.h. Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$z^3 = 1.$$

Wir übertragen das Problem in den $\mathbb{R}^n$ auf Basis der Darstellung $z = x_1 + ix_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$.

a) Man implementiere das Newton-Verfahren zur Suche der 3ten Einheitswurzeln, in reellen Zahlen geschrieben als (man überlege kurz, dass diese Darstellung stimmt)

$$f(x_1, x_2) \coloneqq \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

und gebe wende das Verfahren auf die Startwerte $2.5 + 0.5I$, $-1 + 2I$ sowie $0.4 + 0.8I$ an. Man iteriere jeweils bis $\|f(x^k)\| < 10^{-6}$ erreicht ist oder man breche die Iteration ab, wenn entweder 10 Schritte erreicht sind oder das Residuum den Wert 1000 übersteigt.

b) Wir sollen den Einzugsbereich der Konvergenz untersuchen. Hierzu starten wir das Newton-Verfahren für die Startwerte

$$x_i + y_j I, \quad i, j = 0, \ldots, 100, \quad x_i = -2 + \frac{4i}{100}, \quad y_j = -2 + \frac{4j}{100}.$$

Man erstelle einen Plot und makiere jeden Startwert in unterschiedlichen Farben, je nachdem

- das Newton-Verfahren wegen zuvielen Iterationen oder der Schwelle 1000 abbricht,
- die Einheitswurzel $z = 1$ identifiziert wird,
- die Einheitswurzel $z \approx -0.5 + 0.866I$ erreicht wird,
- die Einheitswurzel $z \approx -0.5 - 0.866I$ erreicht wird.

Hinweis: In der Vorlage sind Tipps zum Erstellen eines Plots gegeben.

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.