Institut für Analysis und Numerik 29.05.2012
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de
Henry von Wahl henry.vonwahl@ovgu.de

**Blatt 7 zur Vorlesung Numerische Mathematik**
**Sommersemester 2020**

**Abgabe bis 05. Juni, 23:59**

**Vertiefung Interpolation** Die Interpolation ist einfaches Hilfsmittel zur einfachen Approximation von Funktionen oder zur Darstellung von diskreten Messpunkten durch Polynome. Wir haben jedoch bereits die Grenzen aufgezeigt: die Interpolation ist anfällig für Rundungsfehler und im Allgemeinen können wir keine Punktweise Konvergenz $|p_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ erwarten.
Im ersten Teil dieser Woche geht es um die Stückweise Interpolation. Diese ist ein einfacher Weg um dem Konvergenzproblem (und auch dem Problem der Stabilität) zu begegnen. Anstelle eines immer höheren Polynomgrades wird das Intervall $[a, b]$ in kleine Teilintervalle aufgespalten d.h. $[x_i, x_{i+1}]$ und auf jedem Teilintervall wird mit (niedrigem Polynomgrad) interpoliert. Konvergenz wird dann über $|x_{i+1} - x_i| \to 0$ erreicht.
Im Anschluss besprechen wir die Extrapolation. Grob gesprochen geht es um die folgende Frage: Wenn wir eine Funktion mit Punkten $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ interpolieren, hat das resultierende Polynom auch Aussagekraft ausserhalb des Bereiches $[a, b]$?
Diese Abschnitte im Buch enthalten viele Beispiele, die für das Verständnis wichtiger sind als eventuelle Beweise.

**Stückweise Interpolation** Man lese Abschnitt *8.2 Stückweise Interpolation*. Zunächst lese man bis zu Satz 8.21. Hier ist stückweise Interpolation wirklich ganz einfach zu verstehen: Man unterteilt das Intervall $[a, b]$ und interpoliert dann auf jedem Teilintervall getrennt voneinander. Man gebe kurze Antworten:

1. Man skizziere die stückweise lineare Interpolation der Funktion $f(x) = x^2$ auf $I = [-1, 1]$ unterteilt in drei Teilintervalle $[-1, -\frac{1}{3}]$, $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{1}{3}, 1]$.
2. Wie sähe die Fehlerabschätzung für die stückweise lineare Interpolation aus (entsprechend Satz 8.21)?

Im Anschluss geht es um sogenannte *Splines*, das ist eine stückweise Interpolation, bei der nicht nur feste Werte vorgegeben werden, d.h. z.B. $p(x_i) = y_i$ sondern auch Anforderungen an die Regularität, z.B. $p(x)$ ist stetig differenzierbar in $x_i$. Man lese weiter bis zum Ende des Abschnittes und gebe kurze Antworten:

1. Was ist der Unterschied zwischen der stückweise kubischen Lagrange-Interpolation und der natürlichen kubischen Spline?

2. Was ist der Aufwand zur Berechnung eines Splines in $100$ Punkten? Worin besteht der wesentliche Aufwand?

3. Was meint man mit dem Zusatz *natürlich?*?

**Numerische Differentiation** Wird übersprungen.

**Extrapolation zum Limes** Prinzipiell kann die Interpolierende $p(x)$ zu $p(x_i) = y_i$ auch ausserhalb der Stützpunkte $x_0, \ldots, x_n$ ausgewertet werden. *Beispiel 8.16* (*Globaler Fehlereinfluss*) hat jedoch gezeigt, dass die Interpolation gerade an den Intervallgrenzen fehleranfällig ist und Oszillationen aufweist. Ohne besondere Vorkehrungen ist der Versuch also zum Scheitern verurteilt. Bei der Extrapolation (zum Limes) geht es genau darum, unter welchen Umständen eine Auswertung auch ausserhalb der Grenzen Erfolg verspricht. Kern wird sein, dass sich die Stützstellen am Intervallrand konzentrieren.
Die wesentliche Anwendung der Extrapolation erklären wir an einem einfachen Beispiel: wir untersuchen den Grenzwert einer Funktion $a(x)$ für z.B. $x \to 0$. An $0$ können wir $a(x)$ nicht direkt auswerten, etwa bei der Funktion $a(x) = \sin(x)/x$. Stattdessen werten wir $a(x)$ in Punkten $x_i$ nahe bei Null aus. Diese Punkte interpolieren wir dann mit Hilfe eines Polynoms $p(x_i) = a(x_i)$ und approximieren den Grenzwert $\lim_{x\to 0} a(x) \approx p(0)$.
Man lese Abschnitt *8.4 Richardson-Extrapolation zum Limes*. Zentral ist Satz 8.27 und sein Beweis. Hier gehen auch die Zusammenhänge aus der letzten Übungsaufgabe ein. Die eigentliche Anwendung mit vollem Potential wird in Satz 8.30 beschrieben. Beispiele 8.31 und 8.32 fassen die Extrapolation gut zusammen und beschreiben auch den Unterschied in der Anwendung der Sätze 8.27 sowie 8.30. Zur praktischen Berechnung der Extrapolation wird auf das *Neville-Schema* zurückgegriffen, welches auf der *Newton'schen Darstellung* der Interpolation beruht. Diese Aspekte haben wir übersprungen. Für das Verständnis sind die entsprechenden Tabellen auch nicht wichtig. Die gleichen Werte werden auch ermittelt, wenn die Stütztstellen jeweils in Lagrange-Darstellung interpoliert werden und das Polynom dann bei $h = 0$ ausgewertet wird. Der Beweis zu Satz 8.27 nutzt auch die Lagrange-Darstellung.
Man gebe kurze Antworten:

1. Was muss für die Stützstellenfolge bei der Extrapolation gelten?

2. Wir wissen, dass die Funktion $a(x) = \sin(x)/x$ eine Entwicklung in geraden Potenzen hat. Welche Konvergenzordnung zur Berechnung des Limes $\lim_{x\to 0} a(x)$ kann erreicht werden, wenn zur Extrapolation jeweils 3 Stützstellen verwendet werden?

## Übungsaufgaben

**Aufgabe 7.1**

Es sei $a(h)$ ein konvergenter Prozess mit der Entwicklung

$$a(h) = a_0 + a_1 h^\alpha + o(h^{\alpha+1}).$$

Man zeige, dass aus drei aufeinander folgenden Werten zu jeweils halber Schrittweite $a(h), a(h/2), a(h/4)$ die Konvergenzordnung experimentell gemäß

$$\alpha \approx \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{a(h) - a(h/2)}{a(h/2) - a(h/4)}\right)$$

bestimmt werden kann. Man nutze diese Methode zur Bestimmung der Ordnung der folgenden Prozesse

| $h$ | $a_1(h)$ | $a_2(h)$ |
|---|---|---|
| $2^{-2}$ | 0.6360915 | 0.6145402401 |
| $2^{-3}$ | 0.6388248 | 0.6121714292 |
| $2^{-4}$ | 0.6394830 | 0.6119234438 |
| exakt | 0.6397000 | 0.6118916834 |

**Aufgabe 7.2**

*Der* $i$*-Trick:*
Für eine Funktion $f(x)$ betrachten wir zur Approximation der ersten *reellen* Ableitung $f'(x_0)$ den Differenzenquotienten

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \approx D_i[f](x_0) := \frac{\operatorname{Im}(f(x_0 + ih))}{h},$$

dabei ist $i$ die imaginäre Einheit und $\operatorname{Im}(z)$ der Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$.
Man zeige durch Taylor-Entwicklung, dass durch den $i$-Trick wirklich eine Approximation der ersten Ableitung gegeben ist. Mit welcher Ordnung konvergiert dieser Differenzenquotient? Welche Ordnung erhält man bei Extrapolation von $h \to 0$ mit jeweils 2 Punkten?

*Hinweis: Übliche Differenzenquotienten haben immer das Problem der Auslösung, z.B. durch Berechnung von* $f(x+h) - f(x)$*. Der i-Trick umgeht dieses Problem und eine Stabilitätsanalyse zeigt wirklich, dass er nicht anfällig für Rundungsfehler ist. Das Problem ist natürlich, dass er eine komplexe Arithmetik verlangt.*

**Programmieraufgabe 7.3**

Python bietet mit dem Paket `scipy.interpolate` verschiedene Methoden zur Interpolation. In der Programmvorlage ist die Anwendung von verschiedenen Möglichkeiten demonstriert:

- Die Lagrange-Interpolation mit einem Polynom von Grad $n$ zu $n+1$ Stützstellen
- Die stückweise lineare Interpolation zu $n+1$ Stützstellen
- Ein natürlicher kubischer Spline zu $n+1$ stützstellen

**a**) Machen Sie sich zunächst mit dem diesmal vollständigen Programm vertraut. Was beobachten Sie für höhere Werte von $n$? Kommentieren sie eventuell die Ausgabe der Lagrange-Interpolation aus, da diese die Darstellung der anderen Interpolationen überdeckt. Erstellen Sie einen Plot für $n = 8$ sowohl im ganzen Intervall $[0, 2]$ als auch im Ausschnitt $[1, 1.5]$.

**b**) Erstellen Sie eine Ausgabe, die jeweils den Fehler zwischen $f(x)$ und der entsprechenden Interpolation plottet. Geben Sie für $n = 2, 4, 8, \dots$ die Fehler aus, z.B. mit Hilfe von `np.linalg.norm(...)`. Welche der drei Varianten scheint für $n \to \infty$ zu konvergieren? Welche Ordnung ermitteln Sie experimentell?

---

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.