Lösung zu Blatt 1

Aufgabe 1.1

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Man berechne die QR-Zerlegung der Matrix. Zur Orthogonalisierung verwende man das Gram-Schmidt Verfahren. Man mache den Test auf Orthogonalität der Matrix Q.

Es seien (a_1, a_2, a_3) die Spaltenvektoren der Matrix. Orthonormieren mit Gram-Schmidt.

$$\tilde{q}_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad q_1 := \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \langle a_2, q_1 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q_2 := \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - \langle a_3, q_1 \rangle q_1 - \langle a_3, q_2 \rangle q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q_3 := \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es ergibt sich somit

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrix ist orthogonal. Für R gilt:

$$A = QR \quad \Leftrightarrow \quad R = Q^{-1} A = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Man nutze die QR-Zerlegung zum Lösen des LGS.

Für die rechte Seite gilt

$$\tilde{b} = Q^T b = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen also mit Rückwärtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $z = 0$ und $y = 0$ und damit $x = 1$.

Programmieraufgabe 1.2

a) Man erstelle eine Python-Funktion zur orthonormalisierung einer gegebenen liste von Vektoren mit dem Gram-Schmidt Verfahren. Hierzu ist dir Vorlage `template_01.py` vorgegeben.
In dieser Vorlage sind auch verschiedene Testlisten von Vektoren angegeben. Man gebe jeweils das Ergebnis aus.
b) Man schreibe eine Funktion zum Test auf Orthogonalität. Bei einer Umsetzung auf dem Computer können wir nicht davon ausgehen, dass Orthonormalität exakt erfüllt ist. Wir definieren daher als Maß für die paarweise Orthogonalität von n Vektoren $x_1, \dots, x_n$ die Funktion

$$O(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, x_j \rangle_2,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ das Euklidische Skalarprodukt ist. Als Maß für die Normierung definieren wir

$$N(x_1, \dots, x_n) \coloneqq n - \sum_{i=1}^{n} |x_i|_2^2,$$

wobei $| \cdot |_2$ die Euklidische Norm ist.
Man gebe beide Kenngrößen für die beschriebenen Testfälle aus.

Abgabe per Mail (**eine Abgabe pro 5er Gruppe**) an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de).
Abgabe bis zum jeweils folgenden Freitag.