Institut für Analysis und Numerik 24.04.2020
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de
Henry von Wahl henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 2 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Aufgabe 2.1

Man erstelle die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Householder-Transformationen. Dabei verwende man dreistellige Arithmetik. Man mache die Proble auf Orthogonalität und berechne $I - Q^T Q$.

Schritt 1:

$$v^{(1)} = \frac{a_1 + \|a_1\| e_1}{\|a_1 + \|a_1\| e_1\|} \approx \begin{pmatrix} 0.964 \\ 0.222 \\ 0.148 \end{pmatrix}$$

Dann:

$$a_1^{(1)} = -\|a_1\| e_1 \approx \begin{pmatrix} -70 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2^{(1)} = a_2 - 2(v^{(1)}, a_2) v^{(1)} \approx a_2 - 71.2 v^{(1)} \approx \begin{pmatrix} -38.6 \\ 4.17 \\ 4.44 \end{pmatrix}$$

$$a_3^{(1)} = a_3 - 2(v^{(1)}, a_3) v^{(1)} \approx a_3 - 48.8 v^{(1)} \approx \begin{pmatrix} -27.0 \\ 4.15 \\ 4.77 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\tilde{v}^{(2)} = \frac{\tilde{a}_2^{(1)} + \|\tilde{a}_2^{(1)}\| \tilde{e}_2}{\| \cdots \|} \approx \begin{pmatrix} 0.918 \\ 0.397 \end{pmatrix}$$

Und dann:

$$\tilde{a}_2^{(2)} = -\|\tilde{a}_2^{(1)}\|\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -6.09 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_3^{(2)} = \tilde{a}_3^{(1)} - 2(\tilde{v}^{(2)}, \tilde{a}_3^{(1)})\tilde{v}^{(2)} \approx \tilde{a}_3^{(1)} - 11.4\tilde{v}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} -6.31 \\ 0.243. \end{pmatrix}$$

D.h.:

$$R := \begin{pmatrix} -70 & -38.6 & -27.0 \\ 0 & -6.09 & -6.31 \\ 0 & 0 & 0.243 \end{pmatrix}.$$

Und zur Probe:

$$Q = (S^{(2)}S^{(1)})^T$$

dann ist $\|\mathbf{QR} - \mathbf{A}\|_2 / \|\mathbf{A}\|_2 \approx \mathbf{0.0004}$.

Aufgabe 2.2

Ein stark vereinfachtes Modell zur Beschreibung der aktiven Fälle einer Pandemie ist durch

$$f_n = \alpha \exp\Big((\beta - \gamma n)n\Big)$$

gegeben. Dabei sind f_n die aktiven Fälle an Tag n, β beschreibt die ungebremste Ausbreitungsrate des Virus, γ beschreibt die Gesamtheit aller Faktoren, die zu einem Rückgang der Ausbreitung führt, α ist ein Normierungsfaktor.

a) Man überführe das Modell in einen linearen Zusammenhang zwischen den Unbekannten. Hierzu vergleiche man Beispiel *Exkurs 4.6: Astronomische Hauptachsenbestimmung eines Himmelskörpers*. Tipp: Logarithmieren. Man stelle das überbestimmte lineare Gleichungssystem anhand der folgenden Daten auf:

Tag	1	4	14	23	32	35	43	48
Fälle	114	550	7057	32686	65130	72800	60387	53017

b) Man berechne die Least-Squares Lösung. Hierbei darf entweder das Normalgleichungssystem aufgestellt und gelöst werden, oder aber die Lösung direkt über die QR-Zerlegung bestimmt werden.

Hinweis: Beim Lösen und Aufstellen der Gleichungssysteme darf der Computer zur Hilfe genommen werden. Die wesentlichen Zwischenschritte sollen aber nachvollziehbar sein.

---

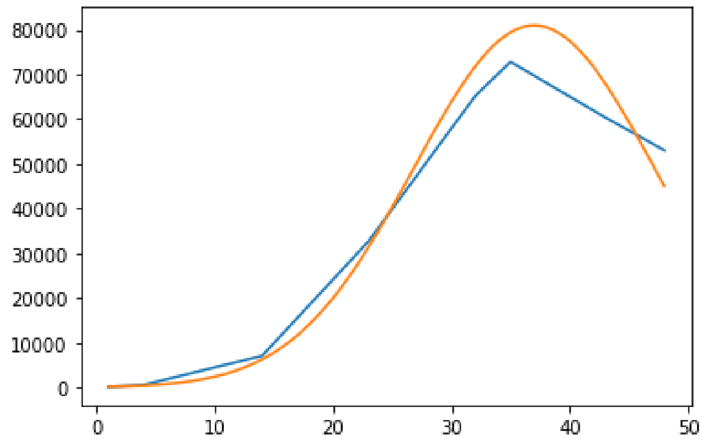
a+b) Nach Logarithmieren gilt

$$\underbrace{\log(f_n)}_{=:F_n} = \underbrace{\log(\alpha)}_{=A} + n\beta - n^2\gamma$$

Lösung mit Python, `loesung02-2.py`. Lösung

$$f_n = 107.69 \exp\Big((0.358 - 0.00484n)n\Big)$$

```
In [24]: runfile('/Users/tom/untitled0.py', wdir='/Users/tom')
Matrix A
[[     1.      1.     -1.]
 [     1.      4.    -16.]
 [     1.     14.   -196.]
 [     1.     23.   -529.]
 [     1.     32.  -1024.]
 [     1.     35.  -1225.]
 [     1.     43.  -1849.]
 [     1.     48.  -2304.]]
Rhs log(F)
[ 4.7362    6.30992   8.86178 10.3947   11.08414 11.19547 11.00853 10.87837]
Matrix A^T A
[[       8.       200.     -7144.]
 [     200.      7144.   -280718.]
 [   -7144.   -280718. 11594932.]]
Rhs A^T log(F)
[    74.4691     2135.18128 -77824.54246]
Lsg Normalgleichungsystem
[4.67928 0.35802 0.00484]
Lsg alpha, beta, gamma
[107.69225    0.35802    0.00484]
```




```
In [25]:
```

Programmieraufgabe 2.3

Abgabe per Mail (**eine Abgabe pro 5er Gruppe**) an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de).
Abgabe bis zum jeweils folgenden Freitag.