Lösung zu Blatt 6Abgabe bis 29. Mai, 23:59

Polynominterpolation

1. Was unterscheidet die Interpolation von der Approximation?

Approximation (von Funktionen) bedeutet ganz allgemein die Näherung einer Funktion $f(x)$ durch eine andere Funktion $p(x)$, z.B. durch ein Polynom. Bei der Interpolation wird die Approximation durch Vorgabe von Funktionswerten (und / oder Ableitungswerte) an Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ bezeichnet, d.h.

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \ldots, n$$

2. Warum ist es nicht sinnvoll die Koffizienten der Interpolation durch Lösen eines LGS zu bestimmen?

Einerseits ist die Interpolation nicht stabil. Kleine Fehler in einzelnen Stützstellen können zu sehr großen Fehlern im gesamten Intervall führen. Dies verstärkt sich sogar bei höherem Polyomgrad.

Darüber hinaus ist auch bei fehlerfreier Interpolation die Konvergenz $p_n(x) \to f(x)$ nicht gesichert.

3. Wie siehen die Lagrange Basispolynome des $P_n = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ aus?

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-1-1)(-1-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{10}$$

$$L_1^{(2)}(x) = \frac{(x-(-1))(x-4)}{(1-(-1))(1-4)} = \frac{(x+1)(x-4)}{-6}$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(4-(-1))(4-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{15}$$

4. Warum kann die Lagrangesche Interpolationsaufgabe im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar sein, wenn zu n Stützstellen $n+1$ Werte vorgegeben werden?

Diese Frage ergibt so nicht sonderlich viel Sinn, denn wie können zu n Stützstellen $n+1$ Werte vorgegeben werden, z.B.: gesucht quadratisches Polynom $p \in P_2$ mit

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 2, \quad p(0) = -1.$$

Dies ist natürlich nicht lösbar, da eine Funktion eine jedem x des Definitionsbereichs *genau einen Wert* im Bild zuordnet.

5. Wieviele Nullstellen kann die erste Ableitung eines Polynoms vom Grad 4 höchstens haben?

Die erste Ableitung ist ein Polynom von Grad 3, kann somit 3 Nullstellen haben.

6. Angenommen zu den Stützstellen x_0, x_1, x_2 seien $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ die drei Basispolynome. Wie sieht dann die Interpolation zur Funktion $f(x) = \exp(x)$ aus?

Es ist einfach

$$p(x) = L_0(x)\exp(x_0) + L_1(x)\exp(x_1) + L_2(x)\exp(x_2).$$

Interpolation von Funktionen

1. Wie interpolieren die Funktion $f(x) = \exp(x)$ mit einem quadratischen Polynom in den Punkten $0, 0.5, 1$. Wie sieht die Fehlerabschätzung im Intervall $[0, 1]$ aus?

Es gilt

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{f'''(\xi)}{6}| \cdot |x| \cdot |x - 0.5| \cdot |x - 1|,$$

und dies lässt sich für $x, \xi, \in [0, 1]$ grob abschätzen zu

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{\exp(1)}{6}| \cdot 0.05,$$

wobei 0.05 eine Schranke für $|x(x - 0.5)(x - 1)|$ auf $[0, 1]$ ist.

2. Wir bleiben bei der Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ und der Interpolationsabschätzung aus Satz 8.11. Angenommen wir betrachten n gleichmäßig verteilte Stützstellen $x_i = i/n$. Konvergiert das Interpolationspolynom für $n \to \infty$ auf $[0, 1]$ gegen die Exponentialfunktion?

Bei der Exponentialfunktion konvergiert die Interpolation, da die Ableitungen alle beschränkt bleiben

$$\frac{d^k}{dx^k} \exp(x) = \exp(x)$$

mit $\max |\exp(x)| = \exp(1)$ auf $[0, 1]$.

Probleme der Interpolation

1. Können wir allgemein von Konvergenz des Interpolationspolynoms gegen die zu interpolierende Funktion ausgehen?

   Nein, da es sein kann, dass die Ableitungen schneller wachsen als der Term $n!$. Gegenbeispiele sind meist auch Gegenbeispiele für die Konvergenz der Taylor-Reihe.

2. Ist die Interpolation stabil? D.h.: bleibt der Einfluss von kleinen Fehlern ϵ_i bei Vorgabe der Interpolation $p(x_i) = f(x_i) + \epsilon_i$ global beschränkt?

   Nein, die Interpolation ist sehr instabil. Gerade bei großen Ordnungen der Polynome können kleine Fehler in den Koeffizienten zu sehr großen Fehlern im Ergebnis führen, gerade für $|x|$ sehr groß.

3. Was meint man mit *Hermite-Interpolation?*

   Bei der Hermite-Interpolation werden auch Ableitungswerte vorgegeben, also z.B.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

   sowie

$$p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1

Gegeben seien $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 0, 1, 2, \dots, n$ und die zugehörigen Lagrangeschen Polynome

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Man zeige die folgenden Eigenschaften der Lagrange-Polynome

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{ii)} & \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i^{(n)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \text{iii)} & \sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} L_i^{(n)}(0) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i. \end{array}$$

Zu f beliebig sei p das Interpolationspolynom von Ordnung n, also

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) f(x_i)$$

Ist f ein Polynom von maximal Grad n, so gilt $p(x) \equiv f(x)$, die Interpolation ist dann Exakt. Dies gilt z.B. für i) mit $f(x) \equiv 1$, also

$$1 \equiv f(x) = p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x)$$

Ebenso gilt für $f(x) = x^k$ mit $0 \leqslant k \leqslant n$

$$0 = f(0) = p(0) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(0) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(0) x_i^k$$

Die Funktion $f(x) = x^{n+1}$ ist nicht in P^n, wird also nicht exakt interpoliert. Mit der Feherabschätzung gilt aber

$$f(0) - p(0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (0 - x_i),$$

also wegen $f(0) = 0$ und $f^{(n+1)}(0) = (n+1)!$

$$-\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} L_i^{(0)} = (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} x_i,$$

was der behaupteten Formel entspricht.

Programmieraufgabe 6.2

Die Programmieraufgabe bezieht sich noch auf das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^3$. Wir suchen die vierten komplexen Einheitswurzeln, d.h. Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$z^3 = 1.$$

Wir übertragen das Problem in den $\mathbb{R}^n$ auf Basis der Darstellung $z = x_1 + ix_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$.

a) Man implementiere das Newton-Verfahren zur Suche der 3ten Einheitswurzeln, in reellen Zahlen geschrieben als (man überlege kurz, dass diese Darstellung stimmt)

$$f(x_1, x_2) \coloneqq \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

und gebe wende das Verfahren auf die Startwerte $2.5 + 0.5\mathrm{I}$, $-1 + 2\mathrm{I}$ sowie $0.4 + 0.8\mathrm{I}$ an. Man iteriere jeweils bis $\|f(x^k)\| < 10^{-6}$ erreicht ist oder man breche die Iteration ab, wenn entweder 10 Schritte erreicht sind oder das Residuum den Wert 1000 übersteigt.

b) Wir sollen den Einzugsbereich der Konvergenz untersuchen. Hierzu starten wir das Newton-Verfahren für die Startwerte

$$x_i + y_j\mathrm{I}, \quad i, j = 0, \dots, 100, \quad x_i = -2 + \frac{4i}{100}, \quad y_j = -2 + \frac{4j}{100}.$$

Man erstelle einen Plot und makiere jeden Startwert in unterschiedlichen Farben, je nachdem

- das Newton-Verfahren wegen zuvielen Iterationen oder der Schwelle 1000 abbricht,
- die Einheitswurzel $z = 1$ identifiziert wird,
- die Einheitswurzel $z \approx -0.5 + 0.866\mathrm{I}$ erreicht wird,
- die Einheitswurzel $z \approx -0.5 - 0.866\mathrm{I}$ erreicht wird.

Hinweis: In der Vorlage sind Tipps zum Erstellen eines Plots gegeben.

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.