Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dr. F. Thein

29. November 2021

Analysis 1

AS, BB, LA, MathIng und Physik
Wintersemester 2021/2022

8. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie die Folge der Partialsummen und den Grenzwert von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

(b) Bestimmen Sie ein möglichst grosses Intervall (a, b), so dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x-3)^k$$

für alle $x \in (a, b)$ konvergiert. Berechnen Sie für $x \in (a, b)$ den Reihenwert in Abhängigkeit von x.

Hinweis: Schreiben Sie in (a) $\frac{1}{4k^2-1} = b_k - b_{k+1}$ für geeignete b_k.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+3}{3k-5}\right)^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2+1}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit den Gliedern

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & n \text{ ungerade}, \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

existieren. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent?

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Folge der Partialsummen und den Grenzwert von

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Aufgabe 5. Für welche Werte von $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}$? Berechnen Sie für diese z den Wert der Reihe in Abhängigkeit von z.

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{10}}{k!}$.

Die gekennzeichneten Aufgaben sind bis zum 10.12.2021 13:00 Uhr, unter elearning.ovgu.de, abzugeben. Die anderen Aufgaben werden in den Übungen besprochen.
Die Lösungswege sind nachvollziehbar und lesbar darzustellen. Inbesondere müssen verwendete Aussagen der Vorlesung entsprechend gekennzeichnet werden.