Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dr. F. Thein

06. Dezember 2021

Analysis 1

AS, BB, LA, MathIng und Physik
Wintersemester 2021/2022

9. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy–Produkts von Reihen, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q^k = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{1-q} \cdot \dfrac{1}{1-q}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** (a) (2 Pkt.) Gegeben seien die reellen Funktionen $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Geben Sie die Definitionsbereiche von $f, g, g \circ f$ und $f \circ g$ an und bestimmen Sie $g \circ f$ sowie $f \circ g$ explizit.

(b) (6 Pkt.) Betrachten Sie für die Definitionsbereiche $D = [0, \infty)$ bzw. $D = (-1, 1]$ die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x}{1+x},$$

(i) Skizzieren Sie in beiden Fällen den Graphen von f und geben Sie jeweils den Wertebereich $f(D)$ an.

(ii) Untersuchen Sie die Funktion in beiden Fällen auf Monotonie und Beschränktheit. Begründen Sie Ihre Resultate, ohne auf Hilfsmittel aus der Differentialrechnung zu verweisen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in [a, \infty)$ den kleinsten Wert von a derart, dass f auf $[a, \infty)$ streng monoton wachsend ist. Geben Sie für dieses a den Wertebereich $W := f([a, \infty))$ an und berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe 4. Es sei $a \in (0,1)$ ein periodischer Dezimalbruch. Der Dezimalbruch a kann dann als Summe eines nicht-periodischen Anteils a_1 und eines periodischen Anteils a_2 geschrieben werden, d.h.

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2,\ a_1, a_2 \in [0,1), \\ a_1 &= 0.a_1^{(1)}a_1^{(2)}\dots a_1^{(n)},\ a_1^{(k)} \in \{0,1,\dots,9\}\,\forall k = 1,\dots,n \\ a_2 &= 0.\overline{a_2^{(1)}a_2^{(2)}\dots a_2^{(m)}} \cdot 10^{-n},\ a_2^{(k)} \in \{0,1,\dots,9\}\,\forall k = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Mit der Notation $\overline{a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(m)}} = a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(m)}a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(m)}\dots$.

(a) Welcher Grenzwertprozess wird durch einen periodischen Dezimalbruch beschrieben?

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert rational ist. D.h. es gilt $a \in \mathbb{Q}$.

(c) Bestimmen Sie für die folgenden periodischen Dezimalbrüche den Grenzwert

  (i) $a = 0.\overline{9}$,

  (ii) $a = 0.\overline{142857}$,

  (iii) $a = 0.43\overline{21}$.

Aufgabe 5. Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchy–Produktes

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-q)^k\right),$$

wobei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{x^2}$.

(a) Geben Sie den Wertebereich W von f an untersuchen Sie die Funktion auf Montonie und Beschränktheit.

(b) Zeigen Sie, dass $f : (0,\infty) \to W$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

Die gekennzeichneten Aufgaben sind bis zum 17.12.2021 13:00 Uhr, unter elearning.ovgu.de, abzugeben. Die anderen Aufgaben werden in den Übungen besprochen.
Die Lösungswege sind nachvollziehbar und lesbar darzustellen. Inbesondere müssen verwendete Aussagen der Vorlesung entsprechend gekennzeichnet werden.