Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dr. F. Thein

13. Dezember 2021

Analysis 1

AS, BB, LA, MathIng und Physik
Wintersemester 2021/2022

10. Übung: Bonusblatt

Aufgabe 1 (11 Punkte)**.**

1. Definieren Sie für die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ die zugehörige Rekursionsvorschrift für f_{n+1}. Starten Sie mit $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Zeigen Sie $f_{n+1} \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$.

2. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$
und zeigen Sie $a_{n-1} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

3. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $\bar{a} \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass gilt $a_n < \bar{a} \Rightarrow a_{n+1} > \bar{a}$ bzw. $a_n > \bar{a} \Rightarrow a_{n+1} < \bar{a}$. Bestimmen Sie $\bar{a}$ explizit.

4. Nutzen Sie das vorhergehende Resultat um zu zeigen, dass die Teilfolge a_{2l} monoton wachsend und die Teilfolge a_{2l+1} monoton fallend sind. Was folgt für die Konvergenz von a_n und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)**.**

(a) Sei $b \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k^2 - 2k)b^{-k}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz in Abhängigkeit von b.

(b) Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe. Es gebe ein $q \in (0, 1)$ und ein $K_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq K_0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Reihe dann absolut konvergiert.

Aufgabe 3 (14 Punkte)**.** Gegeben seien die rationalen Funktion

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} \\ \text{und } f_2(x) &= \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4}{x^3 - 7x + 6}. \end{aligned}$$

Führen Sie für f_1 und f_2 jeweils die folgenden Schritte durch.

(i) Faktorisieren Sie Zähler- und Nennerpolynom über $\mathbb{R}$.

(ii) Verwenden Sie (i), um die Darstellung der Funktion zu vereinfachen und bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ der vereinfachten Funktion.

(iii) Führen Sie für die in (ii) gefundene Darstellung eine Polynomdivision durch.

(iv) Skizzieren Sie den aus (iii) resultierenden Graphen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass das reelle Polynom

$$p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

nur positive Werte annimmt.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x > -1$, $x \leq -1$ und fassen Sie jeweils zwei aufeinanderfolgende Terme so zusammen, dass sich ein nichtnegativer Beitrag ergibt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $f : [-2, \infty) \to W_f$ mit $f(x) = x^2 + 4x - 1$ bijektiv ist. Ermitteln Sie den Wertebereich $W_f := f([-2, \infty))$ sowie die Umkehrfunktion f^{-1}.

Die gekennzeichneten Aufgaben sind bis zum 07.01.2022 13:00 Uhr, unter elearning.ovgu.de, abzugeben. Die anderen Aufgaben werden in den Übungen besprochen.
Die Lösungswege sind nachvollziehbar und lesbar darzustellen. Inbesondere müssen verwendete Aussagen der Vorlesung entsprechend gekennzeichnet werden.