

## Analysis 1

AS, BB, LA, MathIng und Physik  
Wintersemester 2021/2022

### 11. Übung

**Aufgabe 1** (7 Punkte). Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} (5^k + 2^{-k+1})x^k; \quad (ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} x^{2k}; \quad (iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{k}} (x-4)^k.$$

Welche Funktion wird durch die Potenzreihe in (i) dargestellt? Untersuchen Sie für die Potenzreihe in (iii) das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

**Aufgabe 2** (2 + 4 Punkte).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

(b) Sei  $e = \exp(1)$  die Eulersche Zahl. Zeigen Sie nacheinander:

- (i)  $\exp(nx) = \exp(x)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\exp(mx) = \exp(x)^m$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $\exp(r) = e^r$  für alle  $r \in \mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 3** (3 Punkte). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$ . Finden Sie für  $\varepsilon = 10^{-2}$  und die Punkte  $a = 0.2$  und  $a = 20$  jeweils ein möglichst großes  $\delta > 0$ , so dass für  $|x - a| < \delta$  gilt:  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Aufgabe 4.** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k; \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-i)^k}{k} (x+3)^k.$$

**Aufgabe 5.** Für  $x \in \mathbb{R}$  werden die Hyperbelfunktionen wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)), \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

Zeigen Sie:

(a)  $\cosh(x)^2 = 1 + \sinh(x)^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 6.** In welchen Punkten  $a \in D$  sind die folgenden Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in welchen nicht?

(a)  $D = [0, \infty)$

$$f(x) := \sqrt{\exp(x) - 1}.$$

(b)  $D = \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x < 1 \\ 4 - x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Die gekennzeichneten Aufgaben sind bis zum 14.01.2022 13:00 Uhr, unter [elearning.ovgu.de](http://elearning.ovgu.de), abzugeben. Die anderen Aufgaben werden in den Übungen besprochen.

Die Lösungswege sind nachvollziehbar und lesbar darzustellen. Insbesondere müssen verwendete Aussagen der Vorlesung entsprechend gekennzeichnet werden.