

## Analysis 1

AS, BB, LA, MathIng und Physik  
Wintersemester 2021/2022

### 13. Übung

#### Aufgabe 1.

- (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung  $x^3 - 15x + 1 = 0$  im Intervall  $[-4, 4]$  drei Lösungen besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung  $\exp(x) - \frac{1}{x} + 6x = 10$  genau eine Lösung besitzt, welche im Intervall  $[1, 2]$  liegt.

**Aufgabe 2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gelte  $f(x) \in [a, b]$  für alle  $x \in [a, b]$ . Zeigen Sie, dass ein  $c \in [a, b]$  existiert, so dass  $f(c) = c$ . Solch ein  $c$  heißt dann Fixpunkt von  $f$ .

**Hinweis:** Betrachten Sie die Funktion  $g(x) = x - f(x)$ .

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie die folgenden Potenzgesetze für  $x > 0, y > 0$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$ ,
- (b)  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$ .

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) := \sin(x)$  auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  streng monoton wachsend ist und  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  bijektiv auf  $[-1, 1]$  abbildet.

**Hinweis:** Verwenden Sie Blatt 11, Aufg. 1 (a) zum Nachweis der strengen Monotonie sowie den Zwischenwertsatz.

**Aufgabe 5** (4 Punkte). Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der trigonometrischen Gleichung

$$2 \cos^2(x) - 5 \cos(x) = -2.$$

**Aufgabe 6.** Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{x}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für  $a > 0$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existiert und berechnen Sie diesen.
- (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(4, 2)$ . Der Anstieg ist durch den in (i) bestimmten Grenzwert gegeben.
- (c) Zeigen Sie, dass  $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \infty$ .

**Aufgabe 7.** Sei  $a > 0, a \neq 1$ . Zeigen Sie, dass für  $x > 0$  gilt:  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ .

Die Aufgaben werden in den Übungen besprochen.  
Die Lösungswege sind nachvollziehbar und lesbar darzustellen. Insbesondere müssen verwendete Aussagen der Vorlesung entsprechend gekennzeichnet werden.