Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dr. F. Thein

21. Oktober 2021

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022

2. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

(a) Weisen Sie nach, dass die Keplersche Fassregel für Polynome dritten Grades exakt ist.

(b) Wiesen Sie nach, dass die Gauß-Quadratur mit drei Gauß-Punkten für Polynome dritten Grades exakt ist.

Aufgabe 2. Sind die Δ-Differentialoperatoren kommutativ?

Aufgabe 3. Wieviele Möglichkeiten gibt es, mit Hilfe von $u(x_{-2})$, $u(x_{-1})$, $u(x_0)$, $u(x_1)$, $u(x_2)$ die Ableitung $u'''(x_0)$ konsistent zu approximieren? Man gebe drei dieser Approximationen explizit an. Von welcher Ordnung sind diese Approximationen?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Gegeben sei das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{cases} y''(x) &= \sqrt{x}, \\ y(0) &= 1,\, y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des RWP (1).

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der numerischen Approximation

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

die Lösung des RWP (1) unter Verwendung der Schrittweite $h = 0.01$. Stellen Sie den Fehler graphisch über x dar.
Hinweis: Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Funktionswerte and den Gitterpunkten. Lösen Sie dieses System.

Aufgabe 5. Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x)^2, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des AWP (2).

(b) Berechnen Sie den Wert $y(1/2)$ nährungsweise mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren. Nutzen Sie dafür die Schrittweiten $h = 1/2, 1/4, 1/8$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

(c) Der lokale Fehler ε in jedem Zeitschritt setzt sich aus dem lokalen Konsistenzfehler (der in jedem Zeitschritt neu hinzukommende Fehler des Verfahrens) ε_K und einem aus den vergangenen Zeitschritten transportierten Fehler ε_T zusammen. Geben Sie für die berechneten Zeitschritte die entsprechenden Fehler an.

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Gegeben sei das AWP (2) aus Aufgabe 5. Berechnen Sie den Wert $y(1/2)$ nährungsweise mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren mit den Schrittweiten $h = 2^{-k}, k = 1, \ldots, 12$. Geben Sie jeweils den Fehler bei $x = 1/2$ an.

Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} y'(x) &= f(y), \\ y(0) &= y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Wenn in einer Umgebung der exakten Lösung die Abschätzungen

$$|f| \leq A, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$$

gelten, dann folgt für den Fehler des Euler-Verfahrens mit Schrittweite h im Punkt x

$$|y(x) - y_h(x)| \leq A\left(e^{Lx} - 1\right) h.$$

Schätzen Sie mit Hilfe dieser Formel den Fehler des AWP (2) in $x = 1/2$ für jede benutzte Schrittweite h ab und vergleich die Ergebnisse mit den numerischen Fehler.

(Die gekennzeichneten Aufgaben sind am 01. November 2021 in der Übung abzugeben.)