Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dr. F. Thein

16. Dezember 2021

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022

10. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem zur Modellierung chemischer Reaktionen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -0.04x + 10^4 yz, \\ \dot{y}(t) &= \quad 0.04x - 10^4 yz - 3 \cdot 10^7 y^2, \\ \dot{z}(t) &= \qquad\qquad\qquad 3 \cdot 10^7 y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

mit $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$ und $t \in [0, 0.3]$. Die exakte Lösung zum Zeitpunkt $t_{end} = 0.3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t_{end}) &= 9.886739393819 \cdot 10^{-1}, \\ y(t_{end}) &= 3.447715743689 \cdot 10^{-5}, \\ z(t_{end}) &= 1.129158346063 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Lösung Massenerhaltung gilt

$$x(t) + y(t) + z(t) = x(0) + y(0) + z(0) = M.$$

(b) Bestimmen Sie eine Lösung mit einem expliziten Einschrittverfahren Ihrer Wahl und der Schrittweite $h = 10^{-3}$.

(c) Bestimmen Sie eine qualitativ vergleichbare Lösung mit dem impliziten Eulerverfahren. Lösen Sie das Nichtlineare Gleichungssystem mit dem Newtonverfahren. Vergleichen Sie die Ergebnisse wenn Sie das Newtonverfahren nach $1, 10, 20$ Schritten abbrechen.

(d) Vergleichen Sie die Rechenzeiten der Verfahren miteinander. Beurteilen Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob das gegebene Problem steif ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Betrachten Sie die vom Parameter α abhängige Schar linearer Zwei-Schritt-Verfahren der Gestalt (vgl. Blatt 9, Aufgabe 2)

$$x_{n+2} + \alpha_1 x_{n+1} + \alpha x_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n). \tag{2}$$

Für welche α ist das Verfahren D-stabil? Trifft dies auf die Verfahren aus Aufgabe 2, Blatt 9 zu?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x + e^{-t}\cos(t), \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

mit den durch (2) gegebenen Mehrschrittverfahren für verschiedene α, welche in der Nähe der Grenzen für die D-Stabilität liegen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie für das Mehrschrittverfahren

$$x_{n+3} + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) - x_n = h\frac{3+\alpha}{2}(f_{n+2} + f_{n+1}). \tag{3}$$

die Konsistenzordnung in Abhängigkeit von α. Für welche α ist das Verfahren D-stabil.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Gegeben sei ein Polynom ρ vom Grad k mit $\rho(1) = 0$. Zeigen Sie, dass dazu ein eindeutig bestimmtes Polynom σ vom Grad höchstens k derart existiert, so dass das zugehörige Mehrschrittverfahren mindestens die Ordnung $k + 1$ besitzt.

(Die gekennzeichneten Aufgaben sind am 10. Januar 2022 in der Übung abzugeben.)

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und
einen guten Rutsch in das neue Jahr 2022!