Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dipl.-Math. Ferdinand Thein

21. Juni 2018

# Einführung in die Numerik

Sommersemester 2018

## 11. Übung

Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

kann eine Quadraturformel der Form

$$I(f) \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} \sigma_k f(x_k) =: \hat{I}(f)$$

mit den Quadraturgewichten $\sigma_k$ genutzt werden. **Die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln** beruhen auf einer äquidistanten Verteilung der Stützstellen, gegeben durch

$$x_k = a + k \cdot h \qquad k = 0, \ldots, n \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

mit den zugehörigen Quadraturgewichten

| $n$ | Gewichte $\sigma_k$ | Name |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ | Trapezregel |
| 2 | $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ | Keplersche Fassregel |
| 3 | $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$ | 3/8-Regel |

**Aufgabe 1** (8 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^{10} \ln x\,\mathrm{d}x$$

näherungsweise mit der

(a) zusammengesetzten Trapezregel,

(b) zusammengesetzten 3/8-Regel.

Zerlegen Sie dazu das Ausgangsintervall $[1, 10]$ nacheinander in $n = 1, 2, \ldots, 10$ gleich lange Teilintervalle der Länge $h_n$. Bestimmen die zugehörigen numerischen Konvergenzordnungen $p$ der Verfahren mit Hilfe der Formel

$$p = \frac{\ln(|I(f) - \hat{I}_{n+1}(f)|) - \ln(|I(f) - \hat{I}_n(f)|)}{\ln(h_{n+1}) - \ln(h_n)} \,.$$

Programmausgabe: Näherungen des Integrals in Abhängigkeit von $n$, zugehörige numerische Konvergenzordnung

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Implementieren Sie die zusammengesetzte Keplersche Fassregel (Simpson-Regel) zur Berechnung von

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

bei Verwendung von $m = 2^i$, $i = 1, \ldots, 9$, gleichgroßen Teilintervallen. Wie verhalten sich dabei die Fehler?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Von einer Quadraturformel

$$I(f) \approx (b - a) \sum_{k=0}^{4} w_k f(z_k)$$

zum Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ ist bekannt, dass $z_0 = -1$ und $w_0 = 1/16$. Bestimmen Sie $z_1, z_2, z_3, z_4$ sowie $w_1, w_2, w_3, w_4$ derart, dass die resultierende Quadraturformel symmetrisch und der Grad der Polynome welche exakt integriert werden möglichst hoch ist.

(Die Aufgaben sind am 28. Juni 2018 in der Übung abzugeben.)