

ПЕРЕСТАНОВКА С МАКСИМАЛЬНЫМ ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Сотсков Ю.Н.,

доктор физико-математических наук, профессор,

Егорова Н.Г.,

кандидат технических наук,

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,

Вернер Ф.,

доктор наук, профессор,

Университет им. Отто фон Герике, г. Магдебург, Германия

Рассматривается задача минимизации суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований на одном приборе при условии, что для каждой длительности обслуживания требования известны только нижняя и верхняя границы возможных значений. В терминах теории расписаний такая задача $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ с неопределенными числовыми параметрами описывается следующим образом.

Задано множество требований $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, $n \geq 2$, которые необходимо обслужить на одном приборе. Каждому требованию $J_i \in J$ приписан вес $w_i > 0$, характеризующий важность более раннего завершения обслуживания требования J_i . Все требования множества J готовы к обслуживанию в начальный момент времени горизонта планирования. Фактическая длительность p_i обслуживания требования $J_i \in J$ на приборе может оказаться равной любому вещественному числу, заключенному между нижней границей $p_i^L > 0$ и верхней границей $p_i^U \geq p_i^L$, которые известны до начала построения расписания. Законы распределения вероятностей случайных длительностей обслуживания требований не известны на момент построения расписания. При реализации построенного расписания длительность p_i обслуживания требования J_i может оставаться неизвестной вплоть до момента завершения обслуживания требования J_i . Каждое требование $J_i \in J$ должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$, которое становится известным в момент завершения обслуживания требования $J_i \in J$.

Если нижняя граница $p_i^L > 0$ и верхняя граница p_i^U длительностей обслуживания каждого требования $J_i \in J$ совпадают, $p_i^L = p_i^U$, то задача $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ превращается в детерминированную задачу $1 || \sum w_i C_i$, которая может быть решена за время $O(n \log n)$, как было установлено в [1].

Множество всех допустимых векторов $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ длительностей обслуживания требований обозначим $T = \{p \mid p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, \dots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$, где R_+^n – пространство неотрицательных действительных векторов размерности n , $\times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ – декартово произведение заданных отрезков допустимых длительностей обслуживания требований. Фиксированный вектор $p \in T$ допустимых длительностей обслуживания требований называют сценарием. Для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \gamma$, как правило, не существует такой перестановки из множества S всех $n!$ перестановок обслуживания требований множества J , которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества T [2]. В качестве меры устойчивости перестановки $\pi_k \in S$ обслуживания требований J к изменениям длительности их обслуживания предлагается использовать параллелепипед оптимальности этой перестановки.

Параллелепипед оптимальности перестановки обслуживания требований. В работах [3, 5] были исследованы свойства параллелепипеда оптимальности перестановки π_k , который содержится в области устойчивости этой перестановки и содержит многогранник ее устойчивости, который был исследован в [4]. Детерминированную задачу $1 || \sum w_i C_i$ с фиксированным вектором $p \in T$ длительностей обслуживания требований будем обозначать $1 | p | \sum w_i C_i$. Пусть N_k обозначает подмножество множества индексов $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ требований $J_i \in J$.

Определение 1. Максимальный по включению параллелепипед $OB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k} [l_{k_i}^*, u_{k_i}^*] \subseteq T$ будем называть **параллелепипедом оптимальности** перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$ обслуживания требований множества $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, если для любого сценария $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1 | p | \sum w_i C_i$, эта перестановка остается оптимальной и для задачи $1 | p' | \sum w_i C_i$ при любом сценарии $p' \in [l_{k_g}^*, u_{k_g}^*] \times \{ \times_{k_j \in N \setminus k_g} [p_{k_j}, p_{k_j}] \}$ для всевозможных значений $k_g \in N_k$. Если не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1 | p | \sum w_i C_i$, то полагаем $OB(\pi_k, T) = \emptyset$.

Из определения 1 следует, что вариация p' длительности обслуживания требования $p_{k_i}, J_{k_i} \in J$, в пределах отрезка $[l_{k_i}^*, u_{k_i}^*]$ не влияет на оптимальность перестановки $\pi_k \in S$, для которой $p_{k_i} \in [l_{k_i}^*, u_{k_i}^*]$. Непустой отрезок $[l_{k_i}^*, u_{k_i}^*]$, для которого выполняется неравенство $l_{k_i}^* < u_{k_i}^*$, будем называть **отрезком оптимальности** требования J_{k_i} в перестановке π_k . Непустой отрезок $[w_{k_i} / u_{k_i}^*, w_{k_i} / l_{k_i}^*]$, для которого $w_{k_i} / u_{k_i}^* < w_{k_i} / l_{k_i}^*$, будем называть **отрезком оптимальности** отношения веса к длительности w_{k_i} / p_{k_i} . Если максимальный отрезок $[l_{k_i}^*, u_{k_i}^*]$ пустой для требования $J_{k_i} \in J$ в перестановке π_k , то будем говорить, что требование $J_{k_i} \in J$ **не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k** .

Для построения параллелепипеда оптимальности для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ предлагается алгоритм построения параллелепипеда оптимальности соответствующей задачи $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$ с редуцированными интервалами длительностей обслуживания требова-

ний $[\hat{p}_i^L, \hat{p}_i^U] \subseteq [p_i^L, p_i^U]$, полученными по следующим формулам (см. рис. 1): $\frac{w_i}{\hat{p}_i^L} = \min_{1 \leq j \leq i} \left\{ \frac{w_j}{p_j^L} \right\}$,

$$\frac{w_i}{\hat{p}_i^U} = \max_{i \leq j \leq n} \left\{ \frac{w_j}{p_j^U} \right\} \text{ для всех } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Задачу $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$ с указанными редуцированными интервалами возможных длительностей обслуживания требований будем называть **редуцированной задачей**. В статье [4] доказана приведенная ниже теорема и разработан алгоритм сложности $O(n)$ построения параллелепипеда оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для фиксированной перестановки π_k обслуживания требований.

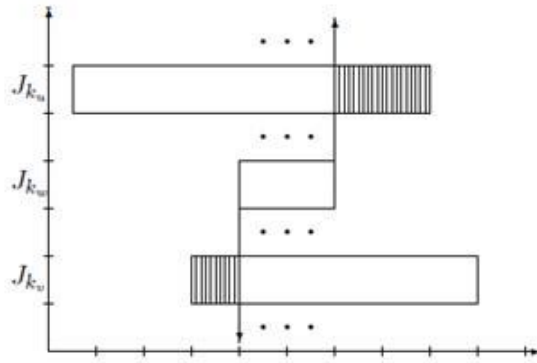


Рис. 1. Отсекаемые в редуцированной задаче интервалы возможных отношений w_{k_i}/p_{k_i} для перестановки $(J_{k_1}, \dots, J_{k_2}, \dots, J_{k_3})$ заштрихованы

Теорема 1 [4]. Параллелепипед оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ совпадает с параллелепипедом оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для редуцированной задачи $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$.

В качестве приближенного решения задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ предлагается использовать перестановку с максимальным периметром Per параллелепипеда оптимальности. Периметр Per рассчитывается как сумма отрезков оптимальности требований в перестановке $\pi_k \in S$. Перестановку $\pi_k \in S$ с максимальным периметром параллелепипеда оптимальности будем называть **оптимальной перестановкой** для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$.

Свойства оптимальных перестановок $\pi_k \in S$. Разработанные алгоритмы построения перестановок обслуживания требований $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ с максимальным периметром параллелепипеда оптимальности основаны на следующем понятии блока требований из множества J .

Определение 2. Блоком будем называть максимальное по включению подмножество $B_r = \{J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_{|B_r|}}\} \subseteq J$ множества требований $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, для которых выполняется

следующее условие: $\min_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{w_{r_i}}{p_{r_i}^L} \right\} \geq \max_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{w_{r_i}}{p_{r_i}^U} \right\}$. Отрезок $[b_r^L, b_r^U]$, для которого

$b_r^L = \max_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{w_{r_i}}{p_{r_i}^U} \right\}$ и $b_r^U = \min_{J_{r_i} \in B_r} \left\{ \frac{w_{r_i}}{p_{r_i}^L} \right\}$, будем называть **ядром** блока B_r .

Требования, принадлежащие только одному блоку, будем называть **фиксированными** в своих блоках. Требования, принадлежащие нескольким блокам, будем называть **нефиксированными** в блоках. В примере 1, представленном на рис. 2, ось абсцисс используется для отображения отношения веса к длительности обслуживания требований. Ось ординат используется для отображения требований из множества J . В примере 1 множество блоков B состоит из двух блоков $B = \{B_1, B_2\}$, где $B_1 = \{J_1, J_2, J_3\}$, $B_2 = \{J_3, J_4\}$. Требования J_1, J_2 и J_4 являются фиксированными, а требование J_3 – нефиксированное. Ядра блоков B_1 и B_2 на рис. 2 заштрихованы.

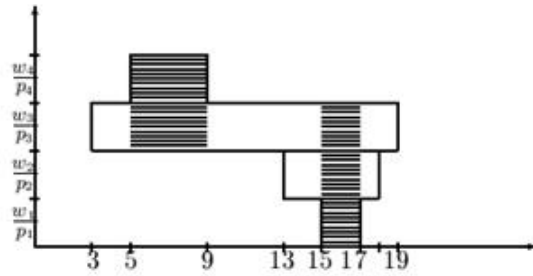


Рис. 2. Пример 1 с двумя блоками, ядра которых заштрихованы.

В работе [5] доказаны следующие лемма 1 и теорема 2.

Лемма 1 [5]. Для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ множество всех блоков определяется однозначно за полиномиальное время $O(n \log n)$.

На основе конструктивного доказательства леммы 1 разработан следующий алгоритм сложности $O(n \log n)$ выделения всех блоков для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$.

Границы ядер первого блока $B_1 \in B$ определяются следующим образом. Вначале определяется левая граница $b_1^L = \max_{J_i \in J} \{w_i / p_i^U\}$ и строится множество требований, входящих в блок B_1 : $B_1 = \{J_i \in J | w_i / p_i^U \leq b_1^L \leq w_i / p_i^L\}$. Затем определяется правая граница ядра блока B_1 по следующей формуле: $b_1^U = \min_{J_i \in B_1} \{w_i / p_i^L\}$.

Аналогично находится второй блок $B_2 \in B$ для множества требований $\{J \setminus J_i | w_i / p_i^U = b_1^U\}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден последний блок $B_m \in B$. Все требования упорядочиваются по невозрастанию отношений $\tilde{b}_i^L = w_i / p_i^U$. Для каждого требования определяется множество требований $B_j = \{J_k \in J | w_k / p_k^U \leq \tilde{b}_i^L \leq w_k / p_k^L\}$ и определяется величина $\tilde{b}_i^U = \min_{J_v \in B_j} \{w_v / p_v^L\}$.

Если выполняется неравенство $\tilde{b}_i^U < b_{i-1}^L$, то отрезок $[\tilde{b}_i^L, \tilde{b}_i^U]$ является ядром блока, т.е. $[b_z^L, b_z^U] = [\tilde{b}_i^L, \tilde{b}_i^U]$. Если $\tilde{b}_i^L < \min_{J_g \in J} \{w_g / p_g^L\}$, то процесс выделения блоков закончен.

Теорема 2 [5]. Если $OB(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то любые два фиксированных требования из разных блоков множества B должны быть упорядочены в перестановке в порядке убывания левых (и правых) границ ядер их блоков.

Будем полагать, что блоки множества $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ пронумерованы в порядке убывания левых границ их ядер, т.е. из неравенства $b_v^L < b_u^L$ следует неравенство $v < u$.

Перестановки с максимальным параллелепипедом оптимальности. После выделения всех блоков и упорядочения требований в порядке невозрастания отношений $\tilde{b}_i^L = w_i / p_i^U$ исходную задачу $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ можно разбить (декомпозировать) на подзадачи, соответствующие выделенным блокам. В работе [5] доказана приведенная ниже теорема 3, которая была

использована для разработки алгоритма сложности $O(n^2)$ для декомпозиции задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ на две подзадачи.

Теорема 3 [5]. Если существуют два смежных блока B_r и B_{r+1} без общих требований, $B_r \cap B_{r+1} = \emptyset$, то задачу можно декомпозировать на две подзадачи $J = P_1 \cup P_2$, где P_1 – множество требований из блоков B_1, B_2, \dots, B_r , а P_2 – множество требований из блоков $B_{r+1}, B_{i+2}, \dots, B_m$. Тогда частные решения $OB(\pi_k(1), T_1)$ и $OB(\pi_k(2), T_2)$, $T = T_1 \cup T_2$, дают общее решение $OB(\pi_k, T) = OB(\pi_k(1), T_1) \times OB(\pi_k(2), T_2)$ исходной задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$.

При декомпозиции исходной задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ требования блоков B_r и B_{r+1} , удовлетворяющие условиям теоремы 3, содержатся в разных подзадачах. Представленная в теореме 3 декомпозиция задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ однозначно определяется множеством всех пар соседних блоков без смежных требований, каждая из которых определяет конец предыдущей подзадачи и начало следующей подзадачи. При этом каждая из полученных подзадач P_1, P_2, \dots, P_v либо содержит только один блок, либо содержит несколько блоков. Для каждой задачи $P_i, 1 \leq i \leq v$, строится оптимальная перестановка $\pi^{s(i)}$, после чего строится оптимальная перестановка $\pi_k = (\pi^{s(1)}, \pi^{s(2)}, \dots, \pi^{s(v)}) \in S$ исходной задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ со следующим параллелепипедом оптимальности полученной перестановки $\pi_k : OB(\pi_k, T) = \times_{i \in \{1, 2, \dots, v\}} OB(\pi^{s(i)}, T^i)$.

Если задача содержит только один блок, $B_1 = J$, то параллелепипед оптимальности $OB(\pi_k, T)$ определяется первым требованием J_{k_1} , вторым требованием J_{k_1} , предпоследним требованием $J_{k_{n-1}}$ и последним требованием J_{k_n} в перестановке всех требований из этого блока. При этом отрезки оптимальности могут иметь только первое требование J_{k_1} и только последнее требование J_{k_n} (т.е. не более двух требований такой перестановки), а длины отрезков оптимальности зависят от второго требования J_{k_2} и предпоследнего требования $J_{k_{n-1}}$ соответственно. Для такого случая задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ справедливо следующее утверждение, доказанное в работе [5].

Лемма 2 [5]. Если $B_1 = J$, то перестановку $\pi_k \in S$ с максимальным периметром параллелепипеда оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ можно построить за $O(n)$ элементарных операций.

Назначение требований в первую, вторую, последнюю и предпоследнюю позиции в перестановке $\pi_k \in S$ осуществляется согласно следующим равенствам:

$$\frac{1}{p_{k_1}^L} = \max_{J_i^*} \left\{ \frac{1}{p_i^L} \right\}, \quad \frac{1}{p_{k_2}^L} = \min_{J_i^*} \left\{ \frac{1}{p_i^L} \right\}, \quad \frac{1}{p_{k_{r-1}}^U} = \max_{J_i^*} \left\{ \frac{1}{p_i^U} \right\}, \quad \frac{1}{p_{k_r}^U} = \min_{J_i^*} \left\{ \frac{1}{p_i^U} \right\},$$

где J_i^* – множество не назначенных ранее в блоки нефиксированных требований задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$. При этом при различном порядке выбора требований из множества $\{J_{k_1}, J_{k_2}, J_{k_{n-1}}, J_{k_n}\}$ могут быть получены различные перестановки из множества S . Для получения искомой оптимальной перестановки достаточно перебрать не более $4! = 24$ перестановок вместо всех $n!$ возможных перестановок n требований.

Пример 2. Рассмотрим следующий пример, исходные данные для которого приведены в таблице 1. Для простоты решения примера положим все веса требований равными единице, $w_i = 1$.

Таблица 1
Исходные данные для примера 2 задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$

1	2	3	5	6
i	p_i^L	p_i^U	w_i / p_i^U	p_i^L
1	6	16	1/16	1/6
2	1	12	1/12	1
3	7	14	1/14	1/7
4	8	13	1/13	1/8
5	4	14	1/14	1/4

Интервалы отношений весов к длительностям обслуживания требований представлены на рис. 3 в прямоугольной системе координат. Задача $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ в примере 2 содержит единственный блок $B_1 = J$ (на рис. 4 ядро этого блока заштриховано). На рис. 4 представлены заданные интервалы длительностей обслуживания требований в прямоугольной системе координат.

Если выбрать требования в первую, вторую, предпоследнюю и последнюю позиции перестановки $\pi_k \in S$ в следующем порядке: $J_2 = J_{k_1}, J_4 = J_{k_2}, J_3 = J_{k_{n-1}}, J_1 = J_{k_n}$, то периметр полученной перестановки $\pi_k = (J_2, J_4, J_5, J_3, J_1)$ будет равен $Per = 9$. Нетрудно убедиться в том, что для других перестановок из множества S для примера 2 параллелепипеды оптимальности имеют периметры меньше 9.

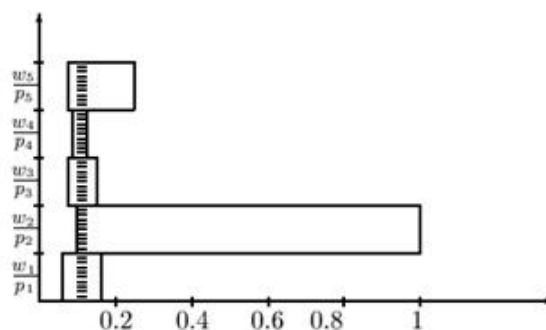


Рис. 3. Интервалы отношений весов к длительностям обслуживания требований для примера 2

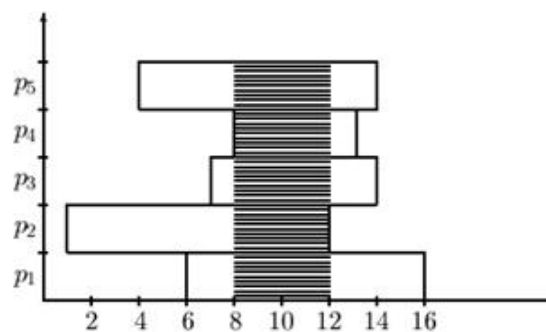


Рис. 4 . Заданные интервалы длительностей обслуживания требований для примера 2

Если задача содержит несколько блоков, то при перемещении нефиксированных требований между блоками, которым требования принадлежат, будут получаться разные перестановки требований. Следовательно, порождаемые параллелепипеды оптимальности для таких перестановок могут быть различными. В общем случае предлагается для всех нефиксированных требований перебирать все допустимые варианты принадлежности этих требований тем или иным блокам.

Теорема 4. Если каждое нефиксированное требование множества J назначено в один из блоков множества B , которым оно принадлежит, то полученная на основе леммы 2 и теоремы 3 перестановка π_k с наибольшим периметром параллелепипеда оптимальности $OB(\pi_k, T)$ может быть построена за $O(n \log n)$ элементарных операций.

На основании теоремы 4 можно найти параллелепипед оптимальности и для общего случая задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$. Для этого достаточно перебрать все возможные варианты размещения нефиксированных требований в блоках, которым они принадлежат, и построить перестановки с наибольшими периметрами параллелепипедов оптимальности для всех полученных размещений нефиксированных требований в их блоках. В процессе перебора вариантов принадлежности нефиксированных требований их блокам могут возникнуть случаи, когда возможна новая декомпозиция полученной задачи на подзадачи. Общая сложность такого алгоритма оценивается величиной $O(2^d n \log n)$, где d – число нефиксированных требований.

Если рост количества нефиксированных требований асимптотически ограничен при росте числа требований n и оценивается величиной $O(\log n)$, то такой переборный алгоритм становится полиномиальным со сложностью $O(n^2 \log n)$.

Пример 3. Рассмотрим следующий пример 3, исходные данные которого приведены в табл. 2. Для простоты веса требований положим равными единице: $w_i = 1$.

Таблица 2
Исходные данные для примера 3 задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$

1	2	3	5	6
i	p_i^L	p_i^U	w_i / p_i^U	p_i^L
1	15	17	1/17	1/15
2	13	18	1/18	1/13
3	3	19	1/19	1/3
4	5	9	1/9	1/5
5	3	7	1/7	1/3
6	1	23	1/23	1

Интервалы отношений весов к длительностям обслуживания требований представлены на рис. 5 в прямоугольной системе координат. Для примера 3 множество B состоит из двух блоков: $B = \{B_1, B_2\}$, где $B_1 = \{J_1, J_2, J_3, J_6\}$, $B_2 = \{J_3, J_4, J_5, J_6\}$. Требования J_1, J_2, J_4 и J_5 являются фиксированными, а требования J_3 и J_6 – нефиксированными. Ядра блоков B_1 и B_2 на рис. 5 заштрихованы.

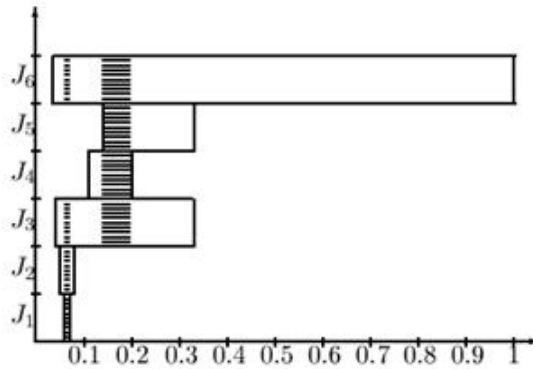


Рис. 5. Интервалы отношений весов к длительностям обслуживания требований для примера 3

На рис. 6 представлены заданные отрезки длительностей обслуживания требований в прямоугольной системе координат.

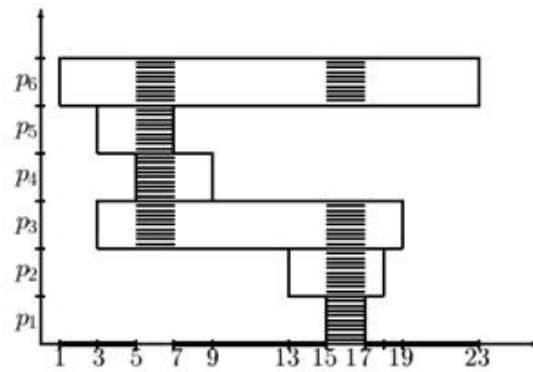


Рис. 6. Заданные отрезки длительностей обслуживания требований (ядра блоков заштрихованы) для примера 3

Для нефиксированных требований J_3 и J_6 возможны следующие варианты их принадлежности блокам B_1 и B_2 . В блок B_1 нефиксированные требования J_3 и J_6 можно распределить следующими четырьмя способами: 1) в блоке B_1 нет нефиксированных требований; 2) $J_3 \in B_1$; 3) $J_6 \in B_1$; 4) $J_3 \in B_1, J_6 \in B_1$. После перечисленных распределений нефиксированных работ в блок B_1 , оставшиеся нефиксированные требования, не вошедшие в блок B_1 , должны быть распределены в блок B_2 .

На рис. 7 изображено дерево решений для примера 3. Для каждой вершины $\pi^i (B_r, J^r)$ дерева решений (здесь i указывает номер вершины, B_r – номер блока, J^r – множество нефиксированных требований, которые распределены в блок B_r) строится перестановка $\pi^{0 \rightarrow i}$ требований, состоящая из фиксированных требований, принадлежащих этому блоку, и нефиксированных требований этого блока, которые распределены в этот блок. При этом перестановка $\pi^{0 \rightarrow i}$ требований имеет наибольший периметр параллелепипеда оптимальности среди перестановок указанных требований. Из всех полученных перестановок выбирается перестановка с наибольшим периметром параллелепипеда оптимальности согласно лемме 2 и теореме 3.

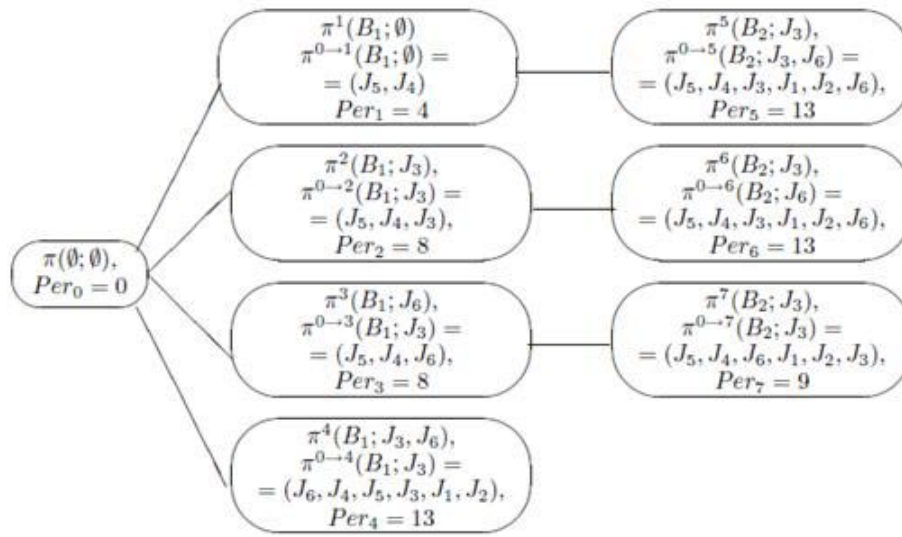


Рис. 7. Дерево решений для примера 3.

Для примера 3 получены следующие две перестановки с параллелепипедом оптимальности, имеющим наибольший периметр $Per_4 = Per_5 = Per_6 = 13$: $\pi^4 = (J_6, J_4, J_5, J_3, J_1, J_2)$, $\pi^5 = \pi^6 = (J_5, J_4, J_3, J_1, J_2, J_6)$.

Результаты вычислительных экспериментов. Для случайно сгенерированных примеров были проведены три серии вычислительных экспериментов на компьютере. В серии а) решались произвольно сгенерированные задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ без каких-либо особенностей. В серии б) решались задачи с множествами требований, входящими в единственный блок. В серии в) решались задачи, в которых интервал отношения веса к длительности одного требования содержал внутри себя все интервалы отношений весов к длительностям остальных требований. Каждая из трех серий состояла из 25 случайно сгенерированных задач с одинаковыми количествами n требований и другими параметрами в каждой серии эксперимента (погрешность длительностей обслуживания требований, процент фиксированных требований, количество блоков требований).

Для каждой рассмотренной в эксперименте задачи $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ строилась перестановка требований $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$ с наибольшим периметром параллелепипеда оптимальности. Затем случайным образом выбирался фактический сценарий $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ из множества T возможных сценариев. Для выбранного фактического сценария $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ строилась оптимальная для задачи $1 | p^* | \sum w_i C_i$ перестановка по алгоритму Смита [1].

Пусть $\Phi^0 = \sum_{i=1}^n w_i C_i^0$ обозначает значение целевой функции для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$, построенной по одному из предложенных в данной статье алгоритму, а $\Phi^* = \sum_{i=1}^n w_i C_i^*$ – оптимальное значение целевой функции для случайно сгенерированной задачи $1 | p^* | \sum w_i C_i$ с фактическими длительностями $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ обслуживания требований, которые становятся известны только после обслуживания всех требований. Тогда относительная

погрешность целевой функции может быть вычислена по следующей формуле:
 $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100\%$.

Для каждой из трех серий сгенерированных задач вычислялось среднее значение относительной погрешности Δ . Основная цель вычислительного эксперимента состояла в определении отклонения целевой функции, полученной для перестановки с максимальным параллелепипедом оптимальности, от целевой функции, полученной для фактически оптимальной перестановки.

Для экспериментов серии а) задачи генерировались следующим образом. Для каждой задачи на числовом отрезке [10,1000] случайно выбиралась середина C искомого отрезка $[p_i^L, p_i^U]$ с использованием равномерного закона распределения случайных величин. По заданной погрешности δ вычислялись целочисленные значения нижней границы p_i^L и верхней границы p_i^U возможных значений $p_i \in R_+^1$ длительностей обслуживания требований. Выбранные веса считались известными на момент построения расписания, причем вес $w_i \in R_+^1$ каждого требования $J_i \in J$ равнялся единице $w_i = 1$ для всех задач серии а). Результаты экспериментов серии а) приведены в табл. 3.

Таблица 3

**Результаты построения оптимальных перестановок
 для случайно сгенерированных задач $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$
 (серия а))**

Число требований, n	Погрешность δ в процентах	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\Phi^0 - \Phi^*)}{\Phi^*} \cdot 100\%$ полученных решений
10	1	0,003486
10	5	0,124256
10	10	0,336489
10	25	2,685694
10	50	11,67374
20	1	0,002153
20	5	0,132725
20	10	0,688434
20	25	3,042971
20	50	8,438201
30	1	0,003976
30	5	0,168885
30	10	0,818434
30	25	4,415353
30	50	13,40911
50	1	0,058302
50	5	0,177385
50	10	0,791101
50	25	3,871003
50	50	11,25797
100	1	0,006574
100	5	0,196515
100	10	0,694281
100	25	2,844204
100	50	8,847757

В экспериментах серии а) минимальная погрешность равна 0,002153%, максимальная погрешность равна 13,40911%, средняя погрешность равна 2,98756%.

Для экспериментов серии б) задачи (содержащие единственный блок требований) генерировались случайно следующим образом. Сначала выполнялась случайная генерация параметров, аналогичная построению примеров для экспериментов серии а). Случайно выбранные веса $w_i \in R_+^1$ каждого требования $J_i \in J$ были равномерно распределены на отрезке $[1, 50]$. После этого для каждого полученного примера обеспечивалось, что все требования входят в один и тот же блок. Для этого случайным образом генерировалось число \bar{p} на числовом отрезке $[10, 1000]$ и случайным образом внутри каждого отрезка $[p_i^L, p_i^U]$ генерировалась длительность $p_i^r \in [p_i^L, p_i^U]$. После этого границы возможных длительностей обслуживания требований $[p_i^L, p_i^U]$ изменялись так, чтобы выполнялось равенство $w_i / p_i^r = 1 / \bar{p}$. Результаты экспериментов серии б) приведены в табл. 4.

Таблица 4

**Результаты построения оптимальных перестановок
для случайно сгенерированных задач $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$
(серия б))**

Число требований, n	Погрешность δ в процентах	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\Phi^0 - \Phi^*)}{\Phi^*} \cdot 100\%$ полученных решений
10	1	0,368836
10	5	1,40331
10	10	3,158721
10	25	6,853226
10	50	11,43732
20	1	0,507178
20	5	1,941939
20	10	3,259812
20	25	7,76742
20	50	14,02912
30	1	0,544076
30	5	2,540525
30	10	5,031449
30	25	10,86262
30	50	17,90908
50	1	0,540756
50	5	2,313992
50	10	4,883427
50	25	10,51869
50	50	18,85317
100	1	0,532014
100	5	2,338265
100	10	4,678039
100	25	10,43888
100	50	17,97625

В экспериментах серии б) минимальная погрешность равна 0,368836%, максимальная погрешность равна 18,85317%, средняя погрешность равна 6,427525.

Для экспериментов серии в) генерация примеров проводилась следующим образом. Вначале генерировалось случайным образом нефиксированное требование, отрезок отношения веса к длительности $[w_1/p_1^U, w_1/p_1^L]$, для которого содержит внутри себя отрезки отношений весов к длительностям остальных фиксированных требований: $I = \{[w_i/p_i^U, w_i/p_i^L], i = \overline{2, n}\}$. Отрезки $[w_i/p_i^U, w_i/p_i^L]$ для требований генерировались в диапазоне $[1/1000, 1]$. Вес каждого требования генерировался случайным образом в диапазоне $[1, 10]$, причем вес нефиксированного требования полагался большим весов любого из фиксированных требований. В табл. 5 представлены результаты вычислительных экспериментов серии в) для случайно сгенерированных таких задач $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ с количеством требований $n \in \{10, 20, \dots, 50, 100\}$.

Таблица 5

**Результаты построения оптимальных перестановок
для случайно сгенерированных задач $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$
(серия в)**

Число требований n	Число блоков m	Количество фиксированных требований в блоке $B_1, B_1 ,$	Количество фиксированных требований в блоке $B_i, i = \overline{2, n}, B_i , (\%)$	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\Phi^0 - \Phi^*)}{\Phi^*} \cdot 100\%$ полученных решений
10	3	7	1 (10%)	3,150169
10	3	5	2 (20%)	3,962534
10	3	3	3 (30%)	2,70919
20	3	15	2 (10%)	3,377308
20	3	11	4 (20%)	3,748392
20	3	7	6 (30%)	3,204191
30	3	23	3 (10%)	4,486963
30	3	27	6 (20%)	1,701811
30	3	11	9 (30%)	1,520874
40	3	31	4 (10%)	4,041737
40	3	23	8(20%)	3,06944
40	3	15	12 (30%)	2,239455
50	3	39	5 (10%)	5,211518
50	3	29	10 (20%)	1,79256
50	3	19	15 (30%)	1,937751
100	3	79	10 (10%)	3,647747
100	3	59	20 (20%)	1,319025
100	3	39	30 (30%)	0,739238
10	4	6	1 (10%)	6,066372
10	4	3	2 (20%)	5,683246
20	4	13	2 (10%)	8,751008
20	4	7	4 (20%)	4,939738
30	4	20	3 (10%)	5,537612
30	4	11	6 (20%)	3,015126
40	4	27	4 (10%)	3,487186
40	4	15	8(20%)	2,446941
50	4	34	5 (10%)	4,405966
50	4	19	10 (20%)	2,38868
100	4	69	10 (10%)	3,122492
100	4	39	20 (20%)	0,921333

В проведенных вычислительных экспериментах разработанные алгоритмы приближенного решения задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \sum w_i C_i$ по качеству получаемых расписаний (перестановок) относительно критерия $\sum w_i C_i$ оказались более эффективными, чем решения соответствующих детерминированной задачи со средними значениями интервалов длительностей обслуживания требований. В перестановках с максимальным параллелепипедом оптимальности минимальное значение погрешности было 0,739238, а максимальное – 8,751008. В перестановках, соответствующих детерминированным задачам со средними значениями интервалов длительностей обслуживания требований минимальное значение погрешности было 0,784083, а максимальное – 13,55389.

Заключение. На основе доказанных свойств параллелепипеда оптимальности разработаны алгоритмы построения перестановки обслуживания требований с наибольшим периметром параллелепипеда оптимальности. Проведены вычислительные эксперименты по оценке эффективности разработанных алгоритмов.

Разработанные алгоритмы рекомендуется использовать для построения расписаний, близких к оптимальным расписаниям, при решении практических задач обслуживания требований с неопределенными числовыми параметрами для одного прибора, являющегося «узким местом» в реальной обслуживающей системе.

Литература

1. Smith, W.E. Various optimizers for single-stage production / W.E. Smith // Naval Research Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3. – № 1. – P. 59 – 66.
2. Sotskov, Yu. N. Scheduling under uncertainty: theory and algorithms / Yu.N. Sotskov, N.Yu. Sotskova, T.–C. Lai, F. Werner. // RUE «Publishing House «Belorusskaya nauka», 2010. – 326 p.
3. Sotskov, Yu.N. Minimizing total weighted flow under uncertainty using dominance and a stability box / Yu.N. Sotskov, T.–C. Lai // Computers & Operations Research. – 2012. – Vol. 39. – P. 1271–1289.
4. Сотсков, Ю.Н. Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований / Ю.Н. Сотсков, Н.Г. Егорова // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 7. – С. 136 – 154.
5. Sotskov, Yu.N. A The optimality box in uncertain data for minimizing the sum of the weighted completion times of the given jobs / Yu.N. Sotskov, T.–C. Lai, N.G. Egorova, F. Werner. – Magdeburg, 2017. – 23 p. – (Preprint / Otto-von-Guericke-Universitet; №1).

Статья поступила 7. 02. 2017 г.



ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ И ИННОВАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИРМЫ

Дмитрук Н.М.,

кандидат физико-математических наук, доцент,

Скурат Е.Н.,

Белорусский государственный университет

В последние годы в экономических приложениях теории оптимального управления большую популярность приобрели задачи управления двухстадийными динамическими системами [1–6]. Такие системы характеризуются наличием двух временных этапов с различной динамикой объекта управления и/или критерия качества и ограничений, что может быть связано, например, с качественными изменениями производственных процессов при переходе к новым технологиям [1–3]. Момент перехода между этапами, как правило, не задан, а должен выбираться оптимальным образом наряду с управляющими переменными, задающими поведение объекта внутри каждого этапа.

Теоретическую основу для исследования задач оптимального управления составляют принцип максимума Л.С. Понтрягина [7] и динамическое программирование Р. Беллмана [8]. Для задач оптимизации двухстадийных процессов один из наиболее популярных подходов к решению экономических задач сочетает идеи [7, 8] и предложен в работе [6]. Развитие на случай, когда динамика системы представлена более чем двумя этапами, по-видимому, ограничивается самим подходом