Bewertung von Finanzderivaten: heiße Intuition oder kühle Berechnung?

Waltraud Kahle

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

1. Geschichtlicher Exkurs
2. Was ist eine Option
3. Das mathematische Modell für den Preis einer Option

1. Geschichtlicher Exkurs

1997: Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an

- **Robert Merton** (Professor of Business Administration, Harvard)
- **Myron Scholes** (Graduate School of Business, Stanford)

für Arbeiten zur Mathematischen Theorie der Bewertung von Optionen für Arbeiten aus dem Jahre 1973.

- **R. Merton:** Journal of Political Economy,
- **F. Black, M. Scholes:** Bell Journal of Economics and Management Sciences.

(1900: Promotion von Louis Bachalier unter Betreuung von Henry Poincaré)

15. Oktober 1997, New York Times:

$$C(S_0, T) = S_0 \Phi(d) - K e^{-rt} \Phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

mit

$$d = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \ .$$

Entwicklung des Aktienkurses:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t$$

$\longrightarrow$

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t) \ .$$

Bild 7: Lösung der stochastischen Differentialgleichung

2. Was ist eine Option

Recht, eine bestimmte Menge eines Gutes zum festgelegten Preis (Ausübungspreis, Basispreis, Strike) am Ende einer Zeitperiode T zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put).

Schon im vorigen Jahrhundert:

- Absicherung von Erzeugern gegenüber Preisverfall,
- Absicherung von Abnehmern gegenüber Preisanstieg.

Optionen auf Wertpapiere:

1973	Chicago Board Options Exchange
1978	Londoner Börse
1990	Deutsche Terminbörse (heute EUREX)

Das Volumen des Optionshandels wächst ständig.

Aktienoptionen:

1987	10.5 Billionen US $
1992	32.6 Billionen US $
1997	62.3 Billionen US $

Frage: Wie hoch ist der faire Preis für eine Option?

(Annahme: Europäischer Typ)

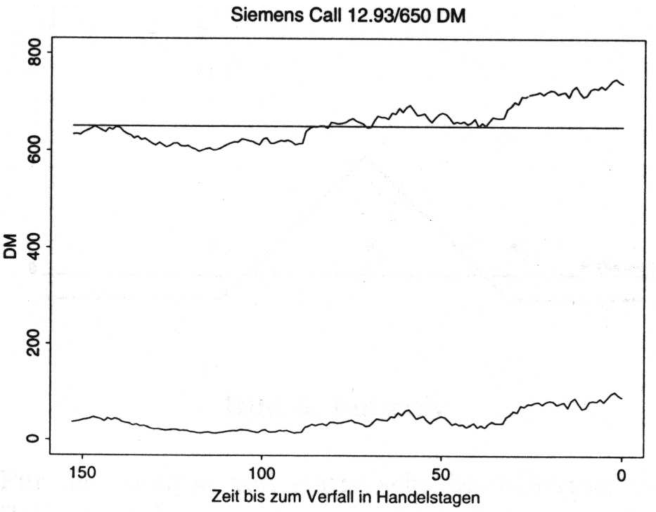

Bild 2: Aktienkurs-Optionspreis
Datenquelle: Deutsche Börse AG, Frankfurt

$$C_T = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

mit

- K - Basispreis,
- S_T - Aktienpreis,
- C_T - Optionspreis.

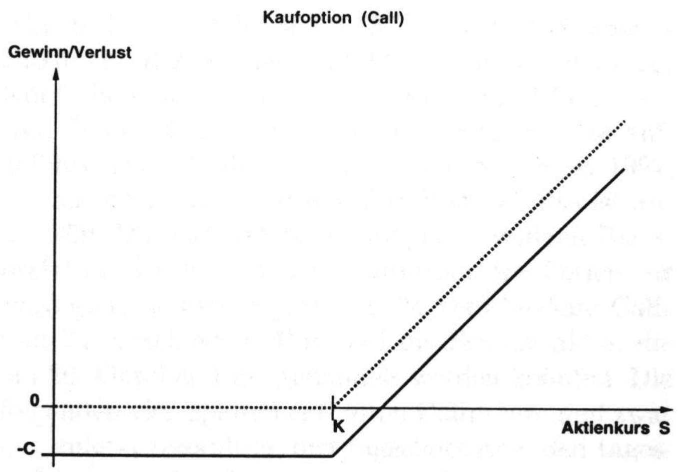

Bild 3: Call

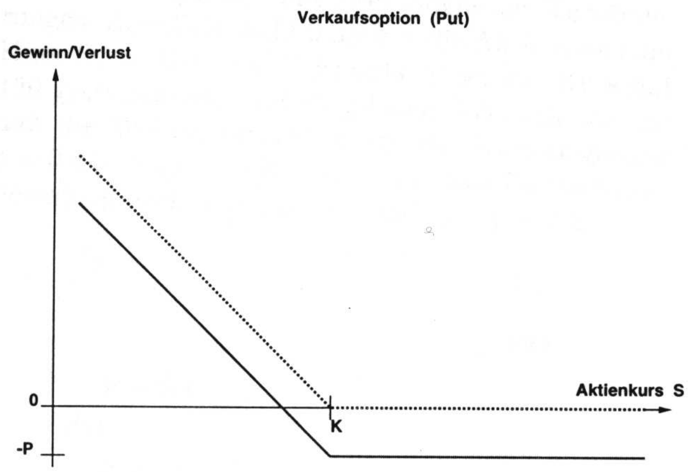

Bild 4: Put

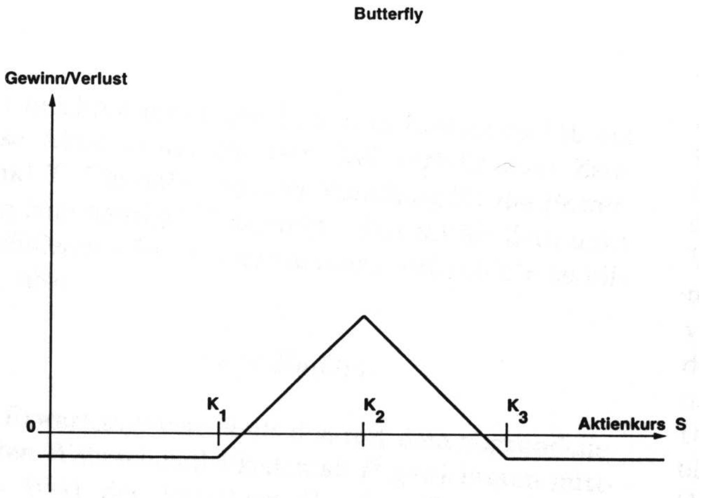

Bild 5: Butterfly

3. Das mathematische Modell für den Preis einer Option an einem einfachen Beispiel

Für S_T betrachten wir zwei Zeitpunkte: S_0 und S_T.
Seien $S_0 = 100$ \$ und

$$S_T = \begin{cases} 130 \text{ \$} & \text{mit} \quad p = 0.4, \\ 80 \text{ \$} & \text{mit} \quad p = 0.6. \end{cases}$$

Ein Call zum Basispreis 110 soll bewertet werden.

Naheliegender Gedanke:

$$C_0 = \mathrm{E}(C_T) \cdot (1 + r)^{-1}.$$

(Wenn $r = 0.05: \; C_0 = 7.62$).
Doch dieser Preis ist nicht richtig:
Wenn der Basispreis gering ist (z. B. $K = 0$), so ist $C_T = S_T$, d. h. der Call hat den Wert der Aktie selbst und müßte zur Zeit 0 mit S_0 bewertet werden.

Die Idee von Black und Scholes:

Wir betrachten ein Wertpapierdepot (Portfolio) in folgender Zusammensetzung:

- 0.4 Stück der Aktie zum Kurs von 100 $,
- Kredit in Höhe von 30,48 $ zum Zinssatz von 5 %,
- **Verkauf** eines Call auf die Aktie zum Preis von 9,52 $.

Dem Wertpapierdepot aus Aktie und (negativer) Anleihe steht der Call gegenüber. Von unserer Seite aus muß der Call ausgeübt werden!

äquivalentes Portfolio: Wert der Option = Wert der Aktien und Anleihen.

Dieses Portfolio hat immer den gleichen Wert wie die Option!
(Kredit ist durch Zinsen auf 32 $ angewachsen)

No-Arbitrage-Prinzip: Es ist kein risikoloser Gewinn möglich.

Der Optionspreis läßt sich jetzt wiederum aus dem Erwartungswertprinzip herleiten, wenn statt p ein *äquivalentes Martingalmaß* verwendet wird.
Der abgezinste Erwartungswert wird konstant gehalten:

$$S_0 = (1+r)^{-1} \cdot \mathrm{E}_{p^*}(C_T) \;,$$

$$100 = (1.05)^{-1} \cdot (130 \cdot p^* + 80 \cdot (1-p^*)) \;,$$

$$\rightarrow p^* = 0.5 \;,$$

$$C_0 = \mathrm{E}_{p^*}(C_T) \cdot (1+r)^{-1} = 9.52 \;.$$

Wie ergibt sich die Zusammensetzung des Portfolios?

Entwicklung des Aktienpreises:

$$S_T = \begin{cases} u \cdot S & \text{mit} \quad p, \\ d \cdot S & \text{mit} \quad 1-p. \end{cases}$$

Entwicklung des Wertes der Option:

$$C = \begin{cases} (u \cdot S - K)^+ & \text{mit} \quad p, \\ (d \cdot S - K)^+ & \text{mit} \quad 1-p. \end{cases}$$

Wertpapierdepot aus Δ Stück Aktien und dem Betrag B aus Anleihen:

$$\Delta S + B = \begin{cases} \Delta u S + (1+r)B & \text{mit} \quad p, \\ \Delta d S + (1+r)B & \text{mit} \quad 1-p. \end{cases}$$

Endwert der Option= Endwert des Depots:
Zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten Δ und B.
äquivalentes Martingalmaß:

$$p^* = \frac{(1+r)-d}{u-d} \ .$$

Bei der Black-Scholes-Formel wird die Lösung der stochastischen Differentialgleichung S_T in C_T eingesetzt und der Erwartungswert bezüglich des „richtigen“ Maßes gebildet.

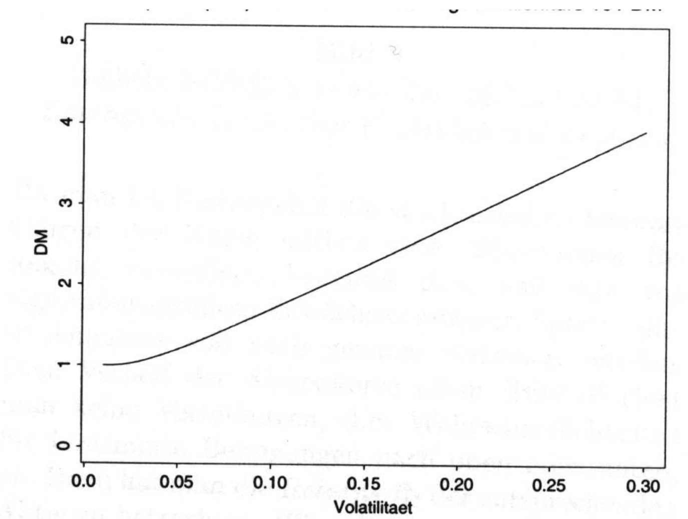

Bild 8: Abhängigkeit des Black-Scholes-Callpreises von der Volatilität